SECUNDARIA TERCER GRADO

MATEMÁTICAS

Nelson Eduardo Núñez Aguilar
Daisy García García
Rodrigo Castillo González
Ana Irene Tovar Ehlers

EDITORIAL TERRACOTA ET

MATEMÁTICAS 3

Dirección editorial: Rosa María Núñez Ochoa
Coordinación editorial: Blanca Luz Torres Cano
Edición: Angélica García León
Lecturas: Xiomara Ballesteros Quezada, Mario Aburto Castellanos, Monserrat Andrea Lemus Rodriguez, Carmen Rivas Martínez
Corrección de estilo: Xiomara Ballesteros Quezada, Carmen Hernández Falcón
Diseño de interiores: Juliana Porras Maldonado © Editorial Terracota S. A. de C.V.
Diagramación: Andrés Ignacio Benitez Vallejo, Aida Paola Xospa Ramírez, Tania Campa González
Ilustraciones: Jesús Enrique Gil de María y Campos
Fotografías: Glow Images Royalty Free, Stock.Xchange, Wikki Commons (Royalty Free)
Diseño de portada: Regina Landa Castro, © Editorial Terracota S. A. de C.V.

Matemáticas 3

Puente de piedra 37
Col. Toriello Guerra • Tlalpan
14050, Ciudad de México
Tel.: (55) 5335 0090

ISBN: 978-607-713-146-5

Primera edición2013
Séptima edición 2018

Impreso en México
Printed in Mexico

Esta obra se terminó de imprimir en mayo de 2017 en Litografía Magno Graf, S.A. de C.V., Calle E No. 6, Parque Industrial Puebla 2000, C.P. 72220, Puebla, Pue.

www.editorialterracota.com.mx

Presentación al alumno

En este tercer libro de Matemáticas de la *Serie Construye*, se han incluido desafíos matemáticos cuya resolución te permitirá desarrollar tus capacidades y destrezas en esta ciencia tan importante y maravillosa; lo que repercutirá en el desarrollo de competencias matemáticas. De esta manera, cuando te enfrentes a situaciones cotidianas relacionadas con el uso de las matemáticas u otras ciencias, contarás con una base sólida y variada de procedimientos de solución que irás construyendo de una manera lógica y sencilla a través de cada una de las lecciones.

La estructura de cada lección de tu libro permite que retomes los conocimientos previos, ejercites tu creatividad así como tu capacidad de análisis, con lo cual serás capaz de integrar diferentes maneras de comprender y representar un fenómeno o situación mediante imágenes, gráficos, tablas entre otros recursos.

Las preguntas de reflexión que acompañan a cada desafío se han incluido con la finalidad de que cuestiones lo que estás realizando, así como para que analices los procedimientos que se te proponen o que tú y tus compañeros plantean.

En la búsqueda de fomentar el trabajo colaborativo hemos incluido actividades que en su mayoría deben ser resueltas ya sea en pareja o en equipo.

El trabajo en parejas y en equipo te permitirá interactuar con tus demás compañeros así como con tu maestro, fomentando el comparar procedimientos y resultados entre ustedes, compartir puntos de vista, así como la reflexión en grupo acerca de nuevos contenidos o conceptos; lo que te indicará si tus ideas y pasos son correctos o si tienes que reestructurar tus planteamientos cuando la retroalimentación grupal así te lo indique.

Al finalizar algunas de las actividades en equipo es recomendable que hagas una pausa para analizar y valorar el avance logrado a través de las lecciones, así como para realizar una autoevaluación sobre los conceptos y contenidos más importantes de la lección.

Esperamos que este enfoque de trabajo te sea atractivo para analizar desde otras perspectivas, situaciones matemáticas, cotidianas o relacionadas con otras ciencias, para emplear el o los procedimientos más adecuados para su resolución.

Presentación al maestro

En este libro, las actividades y situaciones han sido diseñadas de tal manera que la resolución de las mismas, contribuya al desarrollo y la consolidación de aprendizajes esperados por parte de los alumnos.

Para resolver los diversos desafíos que se plantean a través de las lecciones, es fundamental que el maestro fomente en el alumno un proceso de análisis para que a partir de él genere sus propias estrategias y procedimientos conforme el grado de dificultad que las actividades requieran. Para ello, es necesario generar en el aula un ambiente de diálogo, discusión, intercambio y confianza, lo que repercutirá en un mejor desempeño y participación del alumno.

Por ello, es importante que el maestro permita al alumno enfrentarse a los problemas por sí mismo, que se percate de que en ocasiones un problema puede tener varios caminos o procedimientos para llegar a calcular su solución y que, el elegir el camino más conveniente al tomar decisiones, irá fortaleciendo su confianza y mejorando su desempeño en el salón de clases.

Conforme el alumno vaya resolviendo los problemas planteados en cada lección, podrá notar que cada uno de estos desafíos tiene un objetivo menor que sumado a la resolución de todas las situaciones planteadas dentro de la lección, dará como resultado la plena comprensión del contenido que se está analizando y esto le permitirá alcanzar el aprendizaje esperado. En este momento es importante la guía y apoyo del docente para fomentar la exposición de ideas y procedimientos por parte del alumno y así pueda apreciar más claramente lo que está realizando en cada momento.

Las preguntas de reflexión que se le presentan a los alumnos, tienen como finalidad que ellos mismos se cuestionen sobre lo que están haciendo, y con la guía del maestro, vayan registrando y expresando los procedimientos que son válidos, así como los que parten de una idea errónea o confusa, para tener la capacidad de corregirlos rodeados de un ambiente de compañerismo y tolerancia.

Lo anterior permitirá al alumno, aprender sobre los errores cometidos y corregirlos sin mayor problema y que esto no se convierta en un tema de desaprobación tradicional, por lo que el acompañamiento y orientación del maestro en todo momento es de vital importancia para fomentar en el alumno el hacer conjeturas, establecer estrategias y poder compararlas con las de sus compañeros hasta que decidan qué camino es más conveniente.

Debido a que las actividades que se incluyen en este libro buscan que los alumnos analicen y resuelvan por sí mismos los contenidos matemáticos relacionándolos con situaciones cotidianas y de la vida diaria, es normal que surjan entre los estudiantes dudas, ideas, planteamientos y razonamientos diferentes, por lo que la cercanía con ellos, será la principal fuente de retroalimentación entre maestro y alumno y viceversa.

El maestro debe promover el trabajo en equipo, en parejas y de manera individual, para percibir y acompañar el desempeño de sus alumnos de manera personal y de esta forma contar con parámetros para evaluar el aprendizaje de cada alumno.

Es muy importante, que una vez que el estudiante haya obtenido los resultados correctos, el docente haga notar que existen muchas formas de representar la información y que esta parte es vital para comunicar, de manera eficiente, las conclusiones obtenidas en el proceso de resolución del desafío matemático. Por esto, es necesario que el estudiante aprenda a detenerse y tomar un tiempo para analizar las gráficas, tablas, fórmulas y figuras, ya que al familiarizarse con este tipo de representaciones también leerá y comunicará la información importante de manera correcta.

La propuesta didáctica de este libro pretende que juntos, alumno y maestro, construyan un esquema de análisis y resolución de problemas matemáticos y durante este proceso, desarrollen actitudes distintas sobre enseñar y aprender matemáticas; por lo que es necesario que el docente proporcione ciertas condiciones para que los aprendizajes puedan ser logrados, las cuales son:

- Trabajar conjuntamente con los alumnos algunos de los problemas que se incluyen en cada lección.
- Fomentar que en las ocasiones en que se trabaje en parejas o en equipo, los integrantes aporten ideas y que pongan en práctica los procedimientos y estrategias que han analizado con anterioridad.
- Generar siempre un ambiente de respeto, comunicación y armonía que permita la consolidación del conocimiento mediante la comparación de soluciones, procedimientos y estrategias.
- Confirmar que el alumno ha comprendido las nociones, conceptos e ideas principales de cada lección mediante preguntas de reflexión.
- Acompañar al estudiante en su proceso de autoevaluación para percatarse de las fortalezas y debilidades que el alumno percibe de sí mismo con respecto a los contenidos matemáticos estudiados.

Esperamos que mediante la práctica diaria de este enfoque de planteamiento y resolución de problemas matemáticos, usted docente logre que los alumnos sean capaces de asociar los contenidos con situaciones que suceden a su alrededor.

Descripción de la propuesta

El enfoque pedagógico de este libro se basa en la resolución de problemas a partir de situaciones convencionales y cotidianas que se presentan a los alumnos, lo que busca la aplicación de conceptos y contenidos de una forma sencilla.

El grado y tipo de desafíos que se plantean, requieren de conocimientos matemáticos previos para su resolución, por lo que aunque las soluciones no sean obvias, sí proponen el desarrollo de las capacidades y habilidades de los alumnos para lograr soluciones adecuadas al nivel escolar en el que se encuentran.

Conforme se vaya avanzando a través de las lecciones el alumno retomará y analizará nuevos conceptos para resolver problemas. Para ello es necesario la búsqueda de un ambiente que propicie el desempeño y el aprovechamiento, así como la consolidación de aprendizajes.

Por ello, este libro busca que el alumno trabaje de manera autónoma aún dentro de un equipo o con una pareja, al propiciar que se comience a analizar la oración que describe el problema desde la primera actividad de cada lección, evitando que los alumnos esperen la explicación tradicional del maestro o la lectura de las definiciones de cada contenido para comenzar a trabajar.

Cada actividad está diseñada de tal manera que pretende evitar que el alumno repita el mismo procedimiento en la resolución del problema o incluye preguntas de reflexión que le permite analizar otro ángulo del desafío aunque el procedimiento sea el mismo.

La mayoría de las actividades están planteadas y diseñadas para resolverse colaborando en parejas o en equipos, no sólo por el grado de complejidad de la actividad, sino también para fomentar, en la resolución de desafíos, que entre compañeros estimulen y desarrollen su capacidad de análisis, comprensión visual, habilidad con el manejo de números, etcétera.

La organización de los trabajos colaborativos será responsabilidad del docente, de modo que los alumnos sientan propia la responsabilidad de resolver el desafío al que se están enfrentando debatiendo ideas y procedimientos entre ellos, siempre en un ambiente de confianza y respeto.

Asimismo, se ha buscado que los contextos de las actividades propuestas sean de actualidad y de interés para los alumnos, para que estos sean capaces de familiarizarse con la situación descrita, o bien, imaginarse el contexto debido a que puede sentirlo cercano a su entorno o a la época que está viviendo.

Los alumnos deben ser capaces de utilizar el análisis y comprensión de los algoritmos, fórmulas, reglas y conceptos, muy importantes en el estudio de las Matemáticas, como herramientas para que en conjunto con el razonamiento correcto del problema puedan calcular una solución. De igual forma, el docente debe fomentar el análisis y el razonamiento sobre la memorización y la mecanización de operaciones.

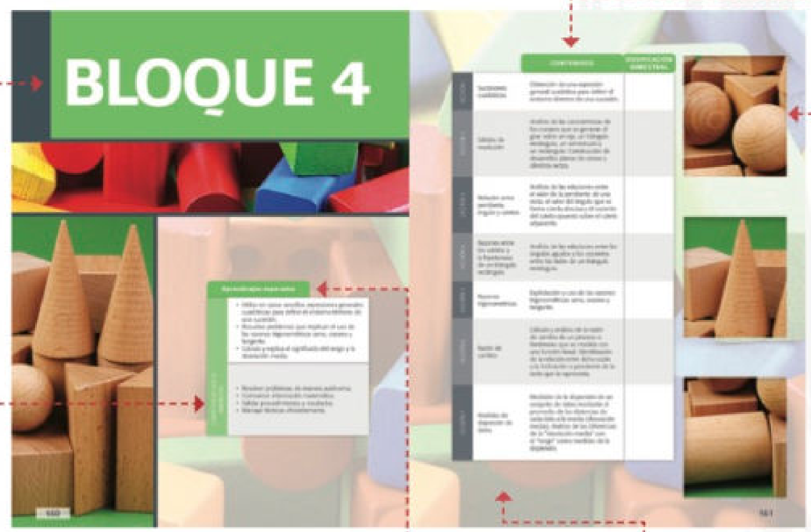
Por lo anterior, consideramos que esta propuesta está diseñada para hacer uso de las matemáticas, como un conjunto de herramientas útiles para resolver situaciones sencillas o problemas más complejos, mediante el análisis del problema, la argumentación de ideas, el planteamiento de estrategias, la comunicación de información y la puesta en práctica de actitudes y habilidades, que permitan tanto al alumno como al docente, lograr un aprendizaje significativo que se arraigue en el proceso educativo de formación de cada uno de los actores involucrados en este curso.

Entrada de bloque

En estas páginas se presentan los aprendizajes que esperamos adquieras tras el desarrollo de las actividades de cada bloque, además de los conocimientos y habilidades que podrás desarrollar al resolver los diferentes desafíos matemáticos que se te presentan en las actividades de cada lección. Incluye una columna para la dosificación bimestral de cada lección.

Contenidos

Número de bloque



Se incluyen imágenes de fondo que aluden a los contenidos que desarrollarás en el bloque

Competencias

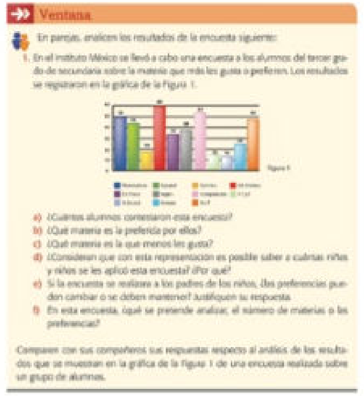
Aprendizajes esperados

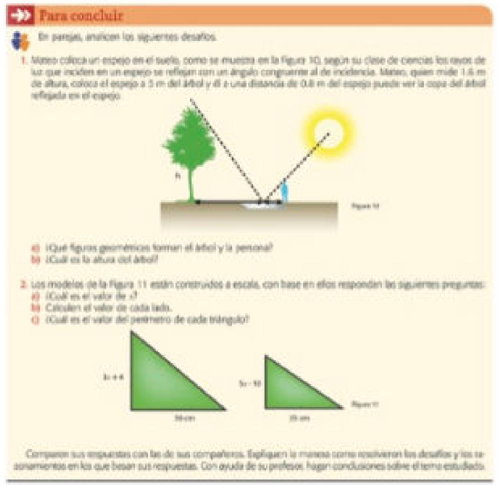
Lecciones

Las lecciones se desarrollan en tres etapas:

Ventana

Aquí encontrarás una actividad inicial, donde mediante preguntas o planteamientos sobre situaciones recuperarás los conocimientos y procedimientos que has utilizado hasta el momento en casos similares.





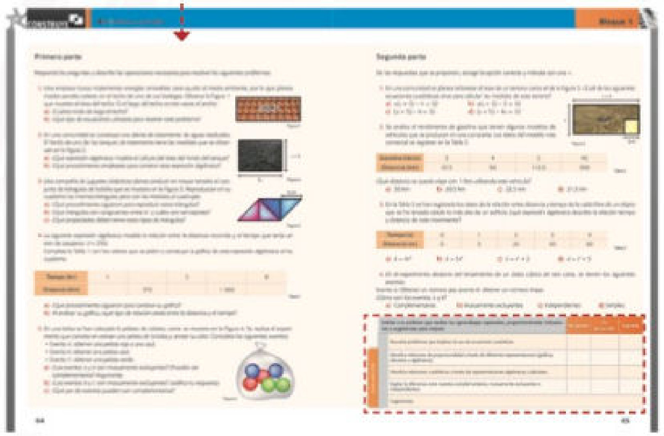
Manos a la obra

En esta sección se propone una serie de actividades individuales, en parejas y en equipos que te permitirá adquirir nuevos conocimientos, así como desarrollar determinadas habilidades y actitudes que te lleven a la comprensión de los contenidos planteados para cada lección.

A través de la resolución de las actividades que se plantean en esta sección, tendrás la responsabilidad de argumentar y justificar matemáticamente, llevando a cabo reflexiones sobre los procedimientos necesarios para resolver los desafíos matemáticos presentados.

Para concluir

En esta sección se presentará una actividad final con una situación que represente un desafío matemático que seas capaz de resolver poniendo a prueba tus habilidades y competencias matemáticas y, de esta manera, verificar el alcance de los contenidos.

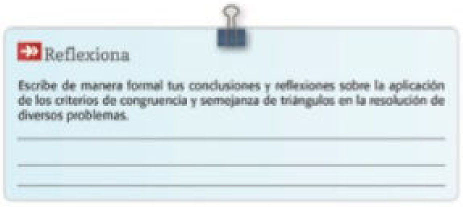


Ponte a prueba

Al final de cada bloque pondrás evaluar los conocimientos y habilidades adquiridos mediante la resolución de los diversos desafíos, clasificados en dos tipos. Los primeros requieren que trabajes en el análisis del problema por medio de la construcción de un procedimiento que te permita responder lo que se te pide (tipo PISA). El segundo tipo de desafíos te presenta al final varias opciones de respuesta, para que tras su análisis y resolución elijas la correcta (tipo ENLACE).

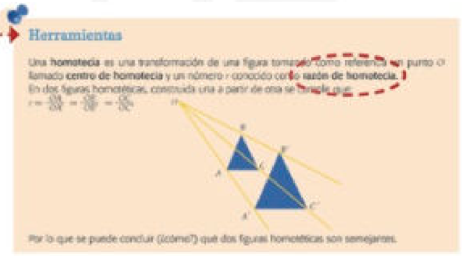
Después de la última sección, se incluye una rúbrica para que, con ayuda de tu profesor, puedas establecer el alcance de los aprendizajes esperados. Tu profesor, apoyándose en tu desempeño durante el bloque, así como en las autoevaluaciones de cada lección, podrá indicarte el nivel alcanzado y darte orientaciones de los aspectos que puedes mejorar.

Secciones complementarias



Reflexiona

Para terminar la lección es necesario que escribas tus conclusiones respecto al tema estudiado.

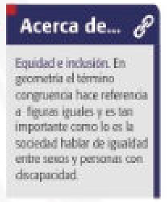


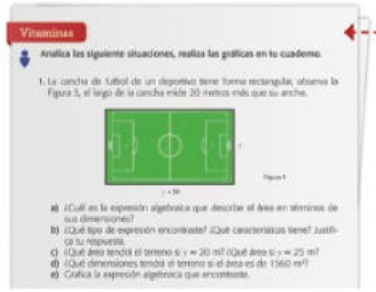
Herramientas

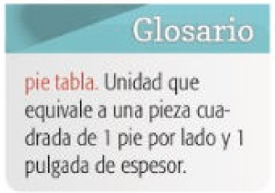
Te presenta información teórica importante, así como sugerencias y explicaciones generales que pueden ser de utilidad para resolver alguna actividad o para que sea más fácil la comprensión de algún algoritmo o concepto. Además, a lo largo del texto se encuentran resaltadas las palabras clave de algunos contenidos, esto con la finalidad de facilitar su identificación.

En tu biblioteca

Recomendaciones para la consulta del acervo de la Biblioteca de Aula y Escolar.







Acerca de

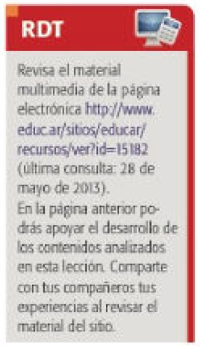
Reflexiona sobre los temas de relevancia social que se relacionan con los temas de estudio.

Glosario

En esta llamada complementaria incluiremos el significado de algunos términos o palabras que probablemente desconozcas.

Vitaminas

Te presentamos diferentes actividades que servirán para consolidar tus habilidades, así como para que desarrolles los procedimientos de resolución que has identificado y enunciado en las actividades preliminares.



Recursos digitales para todos (RDT)

Te recomendaremos el uso de herramientas tecnológicas auxiliares que te servirán para consolidar los conocimientos adquiridos en cada lección. Por ejemplo: Internet, hojas de cálculo, etcétera.

Conexiones
En los grados anteriores, analizaste y resolviste desafíos matemáticos con base en la construcción y resolución de ecuaciones. Es recomendable que revises la lección 3 del bloque 3 de primer grado y la lección 2 del bloque 4 de segundo grado para retomar esos conocimientos.

Conexiones

Con esta llamada complementaria, haremos referencia a lecciones pasadas, bloques, grados anteriores y otras materias del grado escolar en las cuales trabajaste contenidos que serán de utilidad en la lección que estés analizando.

Autoevaluación

Al final de las actividades por equipo, se incluye una rúbrica para tu autoevaluación.

AUTOEVALUACIÓN: Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Construí diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas para resolver cada uno de los desafíos planteados.		
Identifiqué los diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas que se construyeron, así como los diversos procedimientos de resolución de las mismas.		
Expresé los procedimientos que seguí para construir ecuaciones cuadráticas, así como los procedimientos de resolución de las mismas.		

¿Sabías que?

Aquí encontrarás información importante acerca de las matemáticas en la vida real que está ligada a los conceptos con los cuales estarás trabajando en actividades o lecciones, lo que te dará un panorama más amplio de la aplicación de las matemáticas en el medio que te rodea.

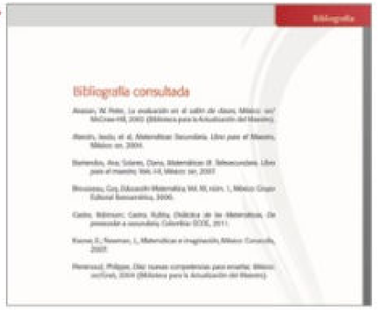
¿Sabías que..?
Las imágenes que se exhiben en las salas de cine, son una figura homotética; ya que el proyector que se emplea cuenta con una potente lámpara y cuando la fuente de luz pasa por la cinta las imágenes pequeñas se proyectan a gran tamaño en la pantalla del cine.

Glosario general

Listado de conceptos importantes para facilitar la comprensión de algunos temas.

Bibliografía

Contiene los libros y sitios de Internet consultados y sugeridos para alumnos y maestros.

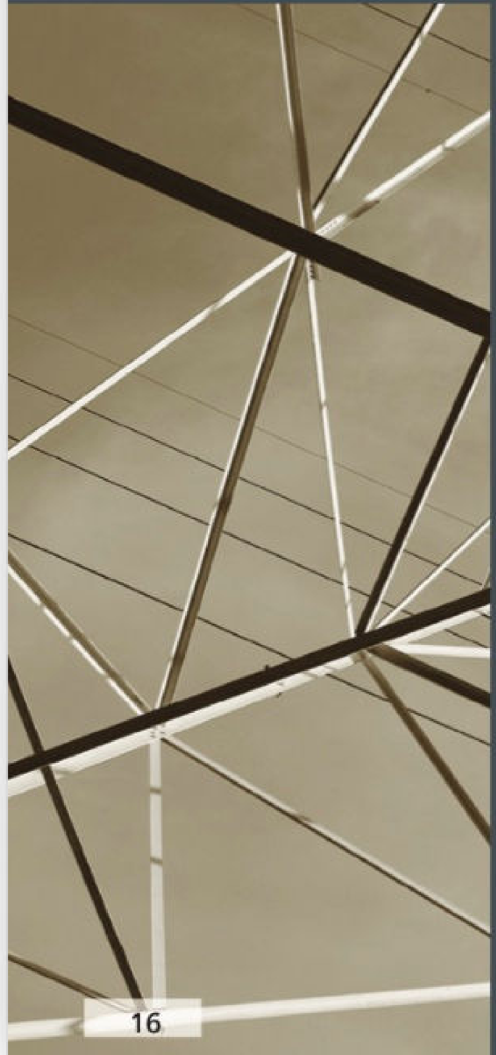


Modalidad de Trabajo

A través de las lecciones identificarás un icono que indica la forma de trabajar las actividades.

individual
equipo
parejas
grupal

BLOQUE 1



Aprendizajes esperados	
	• Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.
COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN:	• Resolver problemas de manera autónoma. • Comunicar información matemática. • Validar procedimientos y resultados. • Manejar técnicas eficientemente.

		CONTENIDOS	DOSIFICACIÓN BIMESTRAL
LECCIÓN 1	Problemas con ecuaciones cuadráticas	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	
LECCIÓN 2	Construcción de figuras y sus propiedades	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	
LECCIÓN 3	Triángulos congruentes y semejantes	Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	
LECCIÓN 4	Análisis de diferentes representaciones de una misma situación	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.	
LECCIÓN 5	Representaciones de variaciones cuadráticas	Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	
LECCIÓN 6	Escala de probabilidad y tipos de eventos	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	
LECCIÓN 7	Diseño y presentación de experimentos	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	

Lección 1 | Problemas con ecuaciones cuadráticas

Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

Conexiones

En los grados anteriores, analizaste y resolviste desafíos matemáticos con base en la construcción y resolución de ecuaciones. Es recomendable que revises la lección 3 del bloque 3 de primer grado y la lección 2 del bloque 4 de segundo grado para retomar esos conocimientos.

Ventana

Reúnanse en parejas para resolver los siguientes desafíos.

1. En la comunidad de San Fernando, como parte de los proyectos ambientales, se planea la construcción de un depósito de basura, conocido como relleno sanitario, el cual quiere aprovecharse también como fuente de biogás. El terreno destinado para este fin tiene el diseño que se muestra en la Figura 1.

Figura 1

a) Considerando las medidas que se indican en la Figura 1, ¿qué expresión algebraica describe el perímetro de este terreno? ______
b) Escriban la expresión algebraica que define el área del relleno sanitario. ______
c) Si el valor del perímetro es de 2 000 m y el área es de 240 000 m², ¿cuál es el valor numérico de x? ______
d) Expliquen, en su cuaderno, el procedimiento para plantear y resolver las ecuaciones que representan este desafío.

Comenten con sus compañeros sus reflexiones acerca de la construcción de ecuaciones para resolver diferentes situaciones cotidianas como lo son el cálculo del perímetro y el área de figuras geométricas.

Glosario

biogás. Combustible producido por la fermentación bacteriana de residuos orgánicos.

:: Manos a la obra

Reúnanse en equipos para resolver los siguientes problemas.

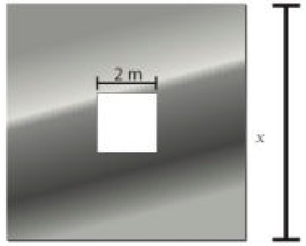


Figura 2

1. En las afueras del terreno se pretende construir un anuncio de metal para informarle a la población el objetivo de la construcción de este relleno sanitario y los beneficios que traerá a su comunidad. El letrero tiene el diseño que se observa en la Figura 2.

El diseño incluye un espacio vacío en el centro que mide 2 m de lado, mientras que el área del resto del anuncio es de 60 m².

a) Si la longitud del lado del anuncio se representa con la letra x, escriban una expresión algebraica que represente su perímetro. ______
b) ¿Qué ecuación pueden construir para representar el área del letrero? ______

c) ¿Qué características tiene la ecuación que representa el área?
d) ¿Cuál es la medida de cada lado del anuncio? ______
e) ¿Qué procedimientos llevaron a cabo para calcular la medida de lado del anuncio?

2. Las oficinas del relleno sanitario deben ocupar un terreno cuadrado que cuente con estacionamiento al frente del inmueble para los trabajadores y visitantes. El área del estacionamiento ocupa una superficie de 90 m² y el área de las oficinas una superficie de 234 m², tal y como puede analizarse en el diseño de la Figura 3.

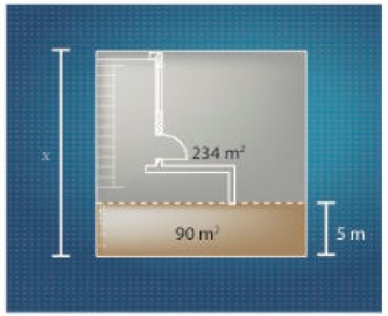


Figura 3

Acerca de...

Educación ambiental para la sustentabilidad. La construcción de rellenos sanitarios y la producción de energía eléctrica a partir del biogás captado se ha convertido en una solución para que la disposición final de los residuos sólidos en el suelo no cause perjuicio al medio ambiente y molestias o peligros para la salud y seguridad pública.

Con base en los datos del diseño de la Figura 3, contesten en su cuaderno:

a) ¿Qué ecuación describe el área de la parte que ocupan las oficinas sin el estacionamiento? ______
b) ¿Qué tipo de ecuación construyeron?
c) ¿Qué procedimiento siguieron para construir esta ecuación?
d) ¿Cuántas incógnitas hay en su ecuación?
e) ¿Cuál es el valor de la medida del lado del terreno? ______

3. El terreno destinado al procesamiento y tratamiento del biogás producido en el relleno sanitario tiene un área de 1 250 m² y la característica de que el largo del terreno es el doble del ancho, como se observa en la Figura 4.

Figura 4

Se requiere colocar una barda en la periferia de este terreno, para ello es necesario conocer sus dimensiones.

a) ¿Qué ecuación cuadrática pueden construir para resolver este desafío?
b) ¿Qué tipo de ecuación cuadrática construyeron?
c) ¿Qué procedimiento de resolución tienen que seguir para calcular las medidas del terreno?

d) ¿Cuáles son las medidas del terreno? ____________________

e) ¿Cuáles consideran que son las ventajas de utilizar ecuaciones cuadráticas para resolver situaciones como la descrita?

Comparen sus respuestas con otros compañeros, y comenten los procedimientos que siguieron para construir diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas para cada desafío, así como la manera en que las resolvieron. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

De manera grupal, discutan las ventajas de utilizar ecuaciones cuadráticas para resolver problemas matemáticos.

AUTOEVALUACIÓN — Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Construí diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas para resolver cada uno de los desafíos planteados.		
Identifiqué los diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas que se construyeron, así como los diversos procedimientos de resolución de las mismas.		
Expresé los procedimientos que seguí para construir ecuaciones cuadráticas, así como los procedimientos de resolución de las mismas.		

Reúnete con un compañero para resolver los siguientes problemas.

4. En la secundaria Lázaro Cárdenas los alumnos de tercer grado propusieron los siguientes acertijos matemáticos. Resuélvanlos empleando los procedimientos que ustedes decidan.

a) Guillermo escribe en un papel un número impar y un número par, y les dice a sus compañeros que si se eleva al cuadrado la suma de esos números se obtiene como resultado el número 25.
- ¿Cuáles son estos dos números? ____________________
- ¿Qué procedimiento siguieron para calcular estos valores?

b) Carlos anota en su cuaderno la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 + 7 = 71$$

- ¿Cuál es el número que se elevó al cuadrado? ____________________
- ¿Qué procedimiento siguieron para calcular este valor?
- Expresen su procedimiento de manera algebraica.
- ¿Consideran que puede haber más de una respuesta a este acertijo? Justifiquen su respuesta.

c) Daniela dice que si eleva al cuadrado un número y al resultado le suma el mismo número obtiene 132.
- ¿Qué número elevó al cuadrado Daniela? ____________________
- ¿Cómo llegaron a esta conclusión? ____________________
- ¿De qué manera pueden describir esta situación como una ecuación cuadrática?
- El número que elevó al cuadrado, ¿fue positivo o negativo? ¿Por qué?

d) Por último, el profesor dice a sus alumnos que si eleva al cuadrado un número entero positivo y le suma la unidad, obtiene como resultado el número 50.
- ¿Cuál es este número? ____________________
- ¿Consideran que sólo existe un número que resuelve el enunciado? ¿Por qué?
- ¿Qué procedimiento siguieron para calcular este valor?
- ¿Qué consideran que sucedería si se eleva el mismo número pero negativo? Justifiquen su respuesta.
- ¿De qué manera se puede representar algebraicamente el acertijo propuesto por el profesor? ____________________

Comparen sus resultados con los de sus compañeros, comenten los procedimientos que siguieron y cuáles fueron las expresiones algebraicas que construyeron para calcular los valores que se piden en cada desafío.

En grupo, discutan lo que sucede cuando se elevan al cuadrado números negativos y cuál es el significado de esta reflexión al resolver ecuaciones cuadráticas. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

5. Trabajen nuevamente en parejas para analizar y construir ecuaciones cuadráticas que les permitan resolver los siguientes acertijos matemáticos.

a) La edad de Luis es igual al doble de la edad de Fernando.
- Si se multiplican ambas edades el resultado es 288, ¿cuántos años tiene cada uno?
- ¿Qué procedimiento deben seguir para construir su ecuación?
- ¿De cuántos términos está compuesta la ecuación?
- ¿Cuántas soluciones consideran que puede tener su expresión algebraica? ¿Por qué?

b) El cuadrado del número de niños menos el doble del mismo número de niñas da como resultado 24 alumnos.
- ¿Qué ecuación puede resolver este desafío?
- ¿Cuántos términos diferentes existen en su ecuación?
- ¿Cuál es la solución de esta ecuación que cumple las condiciones del problema?

c) El cuadrado del número de tiendas de una cadena de comida rápida es igual a la tercera parte de ese mismo número más 34.
- ¿Cuántas tiendas de comida rápida hay?
- ¿Qué procedimiento utilizaron para resolver la ecuación?
- ¿Qué diferencias o similitudes identifican entre las ecuaciones cuadráticas de cada inciso?

En tu biblioteca

Para ampliar tus conocimientos acerca del álgebra y las ecuaciones de segundo grado, consulta el libro de Concepción Ruiz, *Crónicas algebraicas*, México, SEP/Editorial Santillana (2002).

- ¿Siguieron los mismos procedimientos de resolución en cada caso? Justifiquen su respuesta.
- ¿Qué características consideran que deben tener este tipo de ecuaciones?

Comparen sus respuestas y entre ustedes comenten las características que debe tener una ecuación cuadrática o de segundo grado. Con la guía de su profesor, discutan de manera grupal y redacten sus conclusiones acerca de los diferentes procedimientos que utilizaron para resolver sus ecuaciones cuadráticas y qué significa el hecho de que una ecuación pueda tener más de una solución.

En parejas resuelvan los siguientes desafíos matemáticos.

6. Se pretende llevar a cabo una campaña de educación ambiental con relación al relleno sanitario que se instalará en la comunidad de San Fernando. Para transportar los folletos que se van a utilizar, se usan cajas de cartón cuyo diseño se basa en la Figura 5.

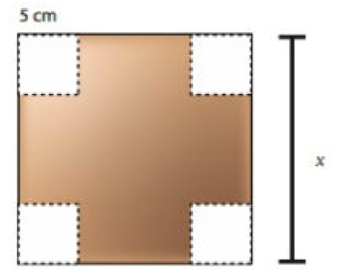


Figura 5

Como se puede observar en el diseño, se han removido las esquinas para poder doblar el material y formar las cajas. Se necesita calcular las medidas de los lados de la caja y se sabe que el área que ocupa el cartón es de 300 cm^2.

a) ¿Qué cuerpo geométrico representa esta caja?
b) ¿Qué ecuación cuadrática pueden construir para resolver este desafío?
c) ¿Cómo deben resolver este tipo de ecuación?
d) ¿Cuánto miden los lados de la caja? ____________________

7. Otra caja de este mismo tipo tiene un volumen de 1 150 cm^3, se observa en la Figura 6 que uno de los lados de la caja mide 2 cm más que el otro y la altura de la caja es de 2 cm.

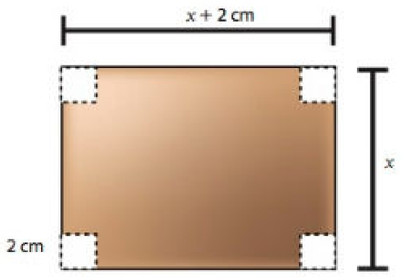


Figura 6

a) ¿Qué cuerpo geométrico tiene esta caja? ____________________
b) ¿Cuáles son las dimensiones de esta caja? ____________________
c) ¿Qué ecuación cuadrática pueden construir para calcular estos valores?
d) ¿Qué tipo de ecuación cuadrática construyeron?

Comparen con otros compañeros sus respuestas y comenten las similitudes y diferencias entre las ecuaciones cuadráticas que construyeron, para resolver cada una de las situaciones anteriores.

Vitaminas

De manera individual, analiza lo que se te pide en cada apartado:

1. El techo del área de procesamiento y tratamiento del biogás del relleno sanitario tiene el diseño de la Figura 7.

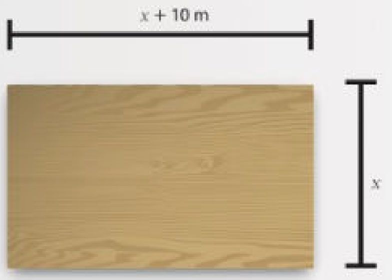


Figura 7

La medida del largo del techo es 10 m más grande que la medida del ancho y el área del techo es de 375 m^2.

a) ¿Cuáles son las medidas del techo?
b) ¿Qué ecuación cuadrática puedes construir para resolver este problema?

2. Analiza la siguiente ecuación cuadrática:

$$(x + 10)^2 = 144$$

a) ¿Cómo tendrían que ser el largo y el ancho del techo para que esta ecuación cuadrática represente una relación entre las medidas de cada lado?
b) ¿Qué procedimiento siguieron para resolver esta ecuación cuadrática?
c) ¿Qué particularidad presenta la última ecuación?
d) ¿En qué otra situación has analizado o utilizado este tipo de ecuación?

Comenta de manera grupal tus respuestas y reflexiones acerca de la resolución de estos problemas. Asimismo, con ayuda de tu profesor discutan los procedimientos que siguieron para calcular los valores que determinan las medidas de los lados del techo en cada situación.

Para concluir

En parejas analicen y resuelvan el siguiente desafío.

1. Un prisma rectangular tiene una altura de 10 cm, mientras que su base mide 10 cm más de largo que de ancho. Si su volumen es de 3 750 cm^3, contesten:
   a) ¿Cuáles son las medidas de este prisma?
   b) ¿Qué ecuación cuadrática puede ser útil para resolver esta situación?
   c) ¿De qué manera resolvieron la ecuación cuadrática?
   d) Compartan con el resto de sus compañeros las respuestas.

Con el apoyo de su profesor, presenten y discutan los diferentes procedimientos de resolución que utilizaron para resolver la ecuación cuadrática que cada pareja construyó.

2. Diseñen un desafío matemático que incluya la construcción y resolución de alguna de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

$$x(x+2)=35$$
$$x^2+1=10$$
$$x^2=5x$$

Recuerden que pueden utilizar contextos como el cálculo de áreas, de volúmenes, medidas, relaciones numéricas, igualdades, etcétera. Presenten su desafío a otra pareja y analicen los procedimientos de resolución que emplearon. De igual manera, participen resolviendo el desafío que les presenten.

RDT

Visita la página electrónica http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_segundo_grado_pav/Ecuacion_segundo_grado_pav.htm (última consulta: 26 de febrero de 2013).
Revisa las definiciones y modifica los valores en la representación gráfica de la escena 1. Al terminar, comparte con tus compañeros tus experiencias y conclusiones.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus reflexiones y conclusiones respecto al estudio de los diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas, su construcción y procedimientos de resolución.

____

____

____

____

Lección 2 | Construcción de figuras y sus propiedades

Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

Ventana

Reúnanse en parejas para analizar la siguiente situación.

1. En un juego de figuras geométricas de madera hay triángulos de diferentes tamaños para construir figuras compuestas. Seis de estos triángulos se muestran en la Figura 1.

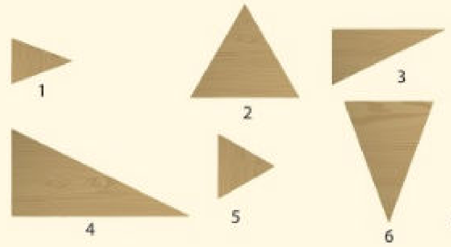


Figura 1

   a) ¿Cuántos tipos de triángulos distintos identificas en la Figura 1?
   b) ¿Cuánto debe ser la suma de los ángulos interiores en los triángulos anteriores? ______________________
   c) ¿Qué propiedad respecto a la longitud de sus lados debe cumplir cada uno de los triángulos anteriores? ______________________

Agrupen los triángulos similares y respondan:
   d) ¿Qué características comparten estos triángulos? ______________________

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y comenten las similitudes y diferencias que identificaron entre los triángulos que analizaron. Discutan de manera grupal qué tipos de triángulos identificaron y cuáles son las características que comparten los triángulos que son iguales.

Conexiones

Busca en tus apuntes y en tu libro de segundo grado los contenidos relacionados con la construcción y características de triángulos, cuadrados y rectángulos, ya que te serán de utilidad en esta lección.

:: | Manos a la obra

Continúen trabajando en parejas y analicen las siguientes situaciones:

1. De la Figura 1 elijan dos triángulos que sean similares y nombren los lados de un triángulo con las letras a, b, c, y los lados del otro triángulo con las letras a', b' y c', asignando la misma letra a los lados correspondientes en los dos triángulos. Midan los lados que nombraron en cada triángulo y completen en su cuaderno la Tabla 1, de la siguiente página, con los datos que se piden.

Triángulo	Medida de lado			Razones entre medidas		
	$a=$	$b=$	$c=$	$\frac{a}{a'}=$	$\frac{b}{b'}=$	$\frac{c}{c'}=$
	$a'=$	$b'=$	$c'=$			

Tabla 1

a) ¿Qué pueden analizar respecto a las medidas de los lados de cada uno de los triángulos?
b) ¿Qué observan respecto a las razones entre las medidas de los lados de cada uno de los triángulos?
c) Con base en el análisis anterior, ¿qué pueden concluir sobre dos triángulos que son similares pero cuyos lados no miden lo mismo?

2. Cada uno de ustedes construya un triángulo dados los siguientes ángulos y enumérenlos.
60°, 60°, 60°   90°, 60°, 30°   90°, 45°, 45°

Reúnan los triángulos construidos por ambos, clasifíquenlos de acuerdo con las medidas de sus ángulos y analicen:
a) ¿Qué similitudes y diferencias observan al comparar sus triángulos?
b) ¿A qué consideran que se debe esto?
En cada par de triángulos midan los lados que comparten los mismos ángulos y registren sus resultados en la Tabla 2.

Triángulo	Medida de lado			Razones entre medidas				
	$a=$	$b=$	$c=$	$\frac{a}{a'}=$	$\frac{b}{b'}=$	$\frac{c}{c'}=$	$\frac{a}{b}=$	$\frac{a'}{b'}=$
	$a'=$	$b'=$	$c'=$					

Tabla 2

c) ¿Qué analizan respecto a las razones entre medidas de los triángulos que agruparon?
d) ¿A qué consideran que se deba esto?
e) ¿Qué pueden enunciar respecto a la razón que existe entre triángulos con medidas de lados correspondientes distintas, pero con las mismas medidas de ángulos interiores?

Este tipo de triángulos son conocidos como **triángulos semejantes.**
f) ¿Cómo consideran que se conoce a la razón entre triángulos semejantes?
g) ¿Qué características deben tener o qué criterios consideran que deben cumplir dos triángulos para ser semejantes?
h) Completen los siguientes enunciados con sus reflexiones:
- Dos triángulos son semejantes si tienen (ángulos) ______________
- Dos triángulos son semejantes si tienen (lados) ______________

3. En un juego geométrico similar, se tiene el grupo de triángulos que se muestran en la Figura 2.

Figura 2

a) ¿Qué características comparten estos triángulos entre sí?
b) ¿Cómo se conoce a este tipo de triángulos?
c) ¿Consideran que este tipo de triángulos son semejantes también? Justifiquen su respuesta.
d) ¿Consideran que aparte de los triángulos semejantes pueden haber otras figuras geométricas semejantes? ¿Por qué?

Comparen sus respuestas y comenten con el grupo las características que deben compartir o los criterios que deben cumplir los triángulos para ser considerados como semejantes. Escriban sus conclusiones en el cuaderno. De igual forma y con apoyo de su profesor, discutan si los triángulos congruentes se consideran también como triángulos semejantes.

Glosario

congruente. Se dice que dos triángulos son congruentes si son idénticos en tamaño y forma.

Reúnanse con otro compañero para trabajar los siguientes desafíos:

4. Los juegos de figuras geométricas se empaquetan en cajas rectangulares con las dimensiones que se muestran en la Figura 3.

Para incluir figuras de mayor tamaño se ha decidido producir cajas más grandes en las que el lado que originalmente mide 30 cm tenga 45 cm de longitud.

a) ¿Cuánto debe medir el otro lado de la caja?
b) ¿Qué procedimiento siguieron para calcular este valor?
c) ¿Consideran que existe más de un procedimiento para resolver este desafío? ¿Por qué?
d) ¿Qué propiedades de la semejanza pueden aplicar para resolver este problema?
e) ¿Cuál es la razón de semejanza entre los lados de las cajas?

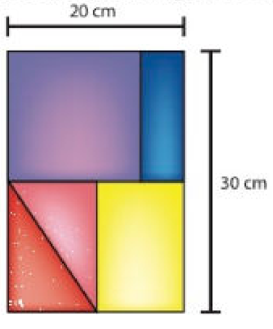


Figura 3

En hojas tracen la caja con las nuevas medidas y compárenla con la figura original.
f) ¿Son semejantes? Justifiquen su respuesta.

Acerca de...

Equidad e inclusión. En geometría el término congruencia hace referencia a figuras iguales y es tan importante como lo es en la sociedad hablar de igualdad entre sexos y personas con discapacidad.

5. En una empresa papelera se han diseñado sobres de diferentes tamaños, las medidas se observan en la Figura 4.

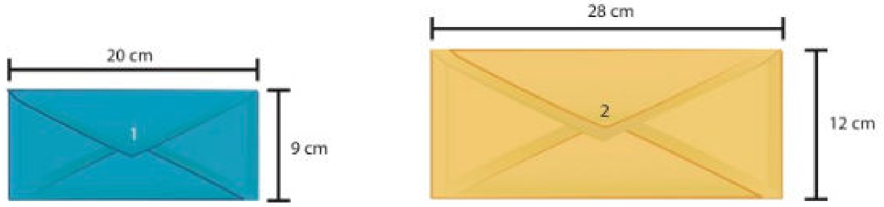


Figura 4

Con base en las propiedades de la semejanza que han analizado hasta el momento, completen la Tabla 3, de la siguiente página, con las medidas que faltan.

Sobre	Medida original	Medida reproducción	Razón de semejanza
1	20 cm	36 cm	
	9 cm		
2	28 cm		
	12 cm	9 cm	

Tabla 3

a) ¿Qué procedimiento siguieron para calcular la razón de semejanza?
b) ¿De qué manera utilizaron la razón de semejanza para calcular las medidas de reproducción faltantes?

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y comenten de qué manera utilizaron las propiedades de semejanza y la razón de semejanza para resolver los desafíos anteriores.

Vitaminas

En forma individual resuelve el siguiente desafío.

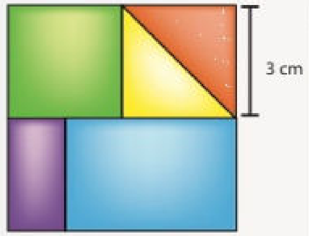


Figura 5

1. Una de las figuras compuestas que se puede formar con figuras geométricas es un tangram de 6 piezas como el de la Figura 5.

Para su producción en serie se construye un modelo a escala del tangram. Con base en la medida que se muestra en la Figura 5, construye el tangram en tu cuaderno, considerando que la nueva medida debe ser de 7.5 cm.

a) ¿Qué propiedades de semejanza son útiles para construir el nuevo tangram?
b) ¿Qué relación existe entre las 6 piezas originales del tangram y las 6 piezas que construiste en tu cuaderno?
c) ¿Cuál es la razón de semejanza entre estas piezas?
d) ¿Qué puedes concluir al respecto?

Compara con tus compañeros tus respuestas y comenta de qué manera te fueron útiles las propiedades de semejanza que has analizado con anterioridad para resolver este desafío.

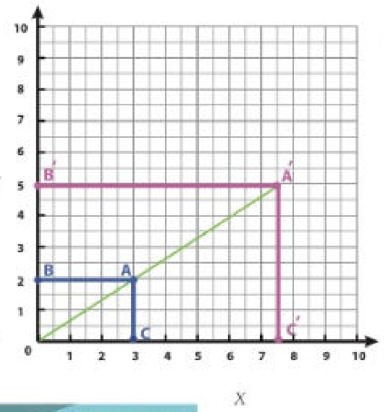


Figura 6

Organícense en equipos para resolver los siguientes desafíos.

6. Se diseñan dos rectángulos a escala para su reproducción en madera. Dichos rectángulos se encuentran trazados en la Figura 6, siendo el rectángulo original el más pequeño.

a) ¿Qué punto en común tienen estos dos rectángulos?
b) ¿Consideran que los dos rectángulos son semejantes? ¿Por qué?
c) ¿Qué pueden analizar respecto del punto *A'*, el punto *A* y el origen del plano cartesiano?
d) Los puntos *O*, *B*, *B'* y *O*, *C*, *C'*, ¿comparten la misma característica?
e) ¿A qué consideran que se deba esto?

Glosario

colineales. Se dice de aquellos puntos que están sobre la misma recta.

Este tipo de puntos se conocen como colineales.
Midan los lados de cada uno de los rectángulos y completen la Tabla 4.

Rectángulo original	Rectángulo ampliado	Razón
$ancho_1 =$	$ancho_2 =$	$\frac{ancho_1}{ancho_2} =$
$largo_1 =$	$largo_2 =$	$\frac{largo_1}{largo_2} =$

Tabla 4

f) ¿Consideran que se cumplen las propiedades de semejanza para estos dos rectángulos? Justifiquen su respuesta.

7. Analicen en la Figura 7 los rectángulos reproducidos a escala.

a) ¿Consideran que todos los rectángulos son semejantes? Justifiquen su respuesta.
b) ¿Consideran que todos los puntos que están contenidos en la línea R son colineales? ¿Por qué?
c) ¿Cómo son entre sí los segmentos que cortan la recta R y cualquiera de los ejes?
d) ¿Qué observan respecto de las medidas de cada uno de los segmentos que cortan a la recta R y al eje *X*?

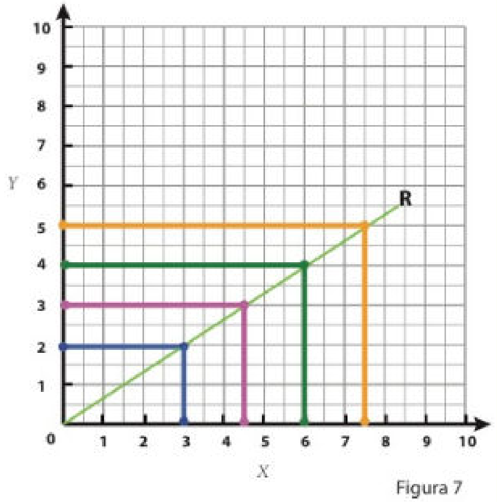


Figura 7

Completen la Tabla 5 con las medidas de los segmentos que se piden.

Secantes	Segmento azul	Segmento rosa	Segmento verde	Segmento naranja	Razón de semejanza
R-*X*					
R-*Y*					

Tabla 5

e) ¿Cómo son las medidas de los segmentos paralelos que cortan a las líneas secantes R y *X* o R y *Y*?

Con base en el análisis que han realizado hasta el momento, completen el siguiente enunciado:

- Los segmentos paralelos contenidos entre dos líneas secantes son ____________ entre sí.

Comparen sus respuestas y lleguen a una conclusión sobre las características que comparten las figuras geométricas cuyos vértices son colineales y su relación con las propiedades de semejanza. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

AUTOEVALUACIÓN — Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Recordé el concepto de puntos colineales.		
Analicé que las figuras geométricas, que tienen en común que todos sus vértices correspondientes son colineales, son figuras semejantes.		
Identifiqué que los segmentos paralelos contenidos dentro de dos secantes son proporcionales entre sí.		

Sigan trabajando en equipo y analicen las siguientes situaciones.

8. Analicen la construcción a escala que se muestra en la Figura 8.

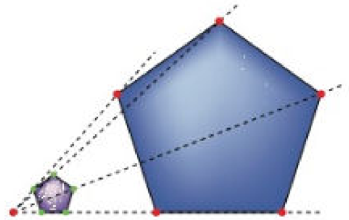


Figura 8

a) ¿Qué procedimiento consideran que se llevó a cabo para construir el segundo pentágono?
b) ¿De qué manera pueden comprobar que el pentágono mayor es semejante al pentágono menor?
c) ¿Qué pueden concluir con respecto a los puntos de cada pentágono y a las rectas que pasan sobre ellos?

¿Sabías que..?

Muchas de las propiedades de semejanza son aplicadas en áreas como la arquitectura y la ingeniería para reproducir grandes estructuras y construcciones que son modeladas en otros tamaños mucho más pequeños.

9. Una empresa de mercadotecnia debe construir calcomanías basadas en el mismo modelo pero de diferentes tamaños, para colocar el logotipo de una empresa de juguetes educativos. El modelo original es un pentágono como el de la Figura 9.

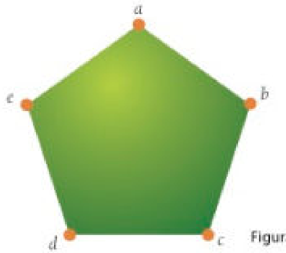


Figura 9

RDT

Visita la siguiente dirección electrónica: http://www.hdt.gob.mx/GuiaSecundaria/guia/odas/SA3_MA_B2_OA_10032/index.html (última consulta: 9 de noviembre de 2013).
En el recurso digital interactivo analizarás distintas formas de construir figuras geométricas semejantes.

Reproduzcan en su cuaderno este modelo y, con base en un punto de referencia, construyan un pentágono semejante cuyos lados midan el doble que el pentágono original marcando los puntos *a'*, *b'*, *c'*, *d'* y *e'* según corresponda.

a) ¿Cuál es el factor de proporcionalidad en este caso?
b) El factor de proporcionalidad, ¿debe ser constante? Justifiquen su respuesta.
c) ¿Cuánto miden los lados del pentágono semejante?
d) ¿Qué procedimiento siguieron para trazar cada punto del pentágono semejante?
e) ¿Qué propiedades de semejanza pueden comprobar en este caso?

Con base en su análisis, completen las siguientes reflexiones:

- Los ángulos del pentágono semejante son __________ con respecto al pentágono original.
- Los lados del pentágono semejantes miden __________ que los lados del pentágono original.

- El punto *a* y el punto *a'* son __________.
- Los segmentos de recta paralelos contenidos entre dos secantes son __________.

Comenten con sus demás compañeros los procedimientos que emplearon para trazar los puntos de una figura geométrica semejante con base en un punto de referencia en la figura original. Con ayuda de su profesor, comprueben que trazaron correctamente los puntos colineales de cada pentágono.

RDT

Visita la página electrónica http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/semejanza/quincena6_contenidos_1c.htm (última consulta: 23 de enero de 2013).
En la página anterior encontrarás animaciones de construcciones de triángulos basadas en las propiedades de semejanza. Comparte en clases la utilidad y la experiencia con el programa interactivo y comenta tus dudas y conclusiones.

Para concluir

De manera individual y en tu cuaderno, resuelve el siguiente desafío.

1. Un despacho de arquitectos está a cargo del diseño de un puente en la comunidad de San Fernando. El diseño a escala se puede analizar en la Figura 10.

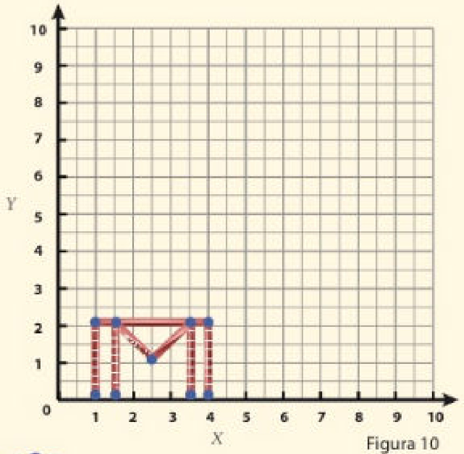


Figura 10

a) ¿Qué procedimiento debes seguir para trazar este diseño con el doble de las medidas?
b) ¿Qué propiedades de semejanza te pueden ser útiles para comprobar que las dos figuras son semejantes entre sí?
c) Las dos figuras, ¿son proporcionales? ¿Por qué?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenta los procedimientos que seguiste para construir una figura semejante a la mostrada en la Figura 10; comenten en qué ocasiones es útil usar algunas de las propiedades de semejanza y en qué ocasiones otras.

En equipo, diseñen un desafío matemático cuya resolución consista en construir un triángulo o un cuadrado semejante a partir de un modelo inicial. Analicen los procedimientos que siguen sus compañeros para resolver este desafío y pidan que comprueben algunas de las propiedades de semejanza que han analizado hasta el momento. De igual forma, participen con entusiasmo resolviendo el desafío que les presenten.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre las construcciones de figuras congruentes y semejantes y la utilidad de conocer sus propiedades.

____

____

Lección 3 | Triángulos congruentes y semejantes

Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

Ventana

En parejas, resuelvan los siguientes desafíos.

1. Luis y Guillermo tienen un juego de palillos de distintos tamaños y están analizando la posibilidad de formar cinco triángulos diferentes utilizando tres de estos palillos; las medidas de estos se muestran en la Figura 1.
   a) ¿Consideran que se pueden construir más de 5 triángulos con estas medidas? ¿Por qué?

Tracen estos triángulos en su cuaderno y registren en la Tabla 1 las medidas de cada palillo que se empleó.

Conexiones

En primer grado analizaste cómo trazar triángulos y cuadriláteros mediante el uso del juego de geometría. Retomar esos apuntes te facilitará las construcciones de figuras en esta lección.

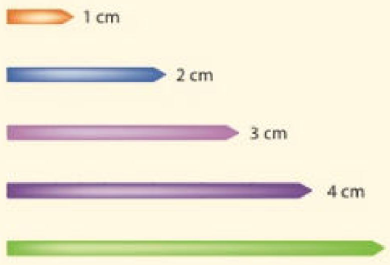


Figura 1

Triángulo	Medida de lado 1	Medida de lado 2	Medida de lado 3
1			
2			
3			
4			
5			

Tabla 1

b) ¿Con qué combinación o combinaciones de medidas no fue posible construir un triángulo?
c) ¿A qué consideran que se debe esto?
d) Con base en su análisis, dadas las medidas de los palillos de madera siguientes, completen la Tabla 2 enunciando si es posible o no formar un triángulo en cada caso. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Medidas	¿Existe un triángulo?
2 cm, 3 cm, 5cm	
1 cm 2 cm, 3.5 cm	
3 cm, 4 cm, 6 cm	
4.5 cm, 3.5 cm, 2 cm	
10 cm, 5 cm, 4 cm	

Tabla 2

e) ¿Cuál es la razón por la que en algunos casos no es posible construir un triángulo?
f) ¿Consideran que dados tres segmentos de recta siempre es posible construir un triángulo? Justifiquen su respuesta.

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros, así como los procedimientos que siguieron para construir triángulos cuando se cuenta con la medida de 3 segmentos de recta. Con ayuda de su profesor discutan, de manera grupal, los casos en los que no es posible construir un triángulo y a qué se debe esto. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

:: Manos a la obra

Continúen trabajando en parejas y realicen las siguientes construcciones.

1. En una hoja de su cuaderno, tracen un triángulo empleando las medidas de los palillos de 4 y 5 cm.

Figura 2

Recorten el triángulo que construyeron y compárenlo con el de otras parejas.
   a) ¿Cuántos triángulos diferentes pudieron construir? ____________
   b) Si sólo se proporciona la medida de dos de los lados de un triángulo, ¿es posible formar un único triángulo? ¿Por qué? ____________

2. Analicen los triángulos que se muestran en la Figura 3, los cuales forman parte de un tangram.

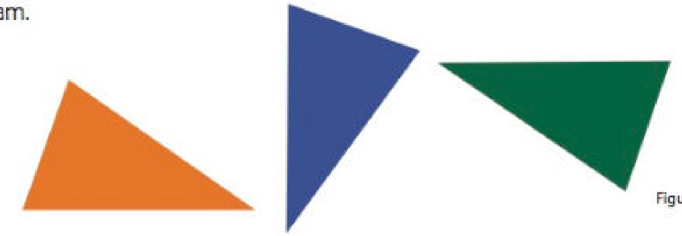


Figura 3

   a) ¿Cuáles son las similitudes y diferencias de los tres triángulos?

Cada uno de ustedes construya un triángulo con las medidas de cualquiera de los triángulos anteriores.

b) ¿Es diferente de los anteriores? ¿Por qué?
c) Dadas las medidas de los tres lados de un triángulo, ¿cuántos triángulos diferentes es posible trazar? Justifiquen su respuesta.
d) Si en dos triángulos se sabe que la medida de los tres lados correspondientes es la misma, ¿qué se puede decir de la medida de los ángulos?

Comparen con otros compañeros sus respuestas y analicen las características de dos triángulos cuando se sabe que tienen dos lados o tres lados, respectivamente, con las mismas medidas.

En equipos analicen la información que se proporciona para realizar las construcciones en cada apartado.

3. Con dos palillos o popotes de medidas 3 cm y 5 cm, respectivamente, construyan un triángulo, cuidando que el ángulo que forman estos segmentos de recta sea de 45°.

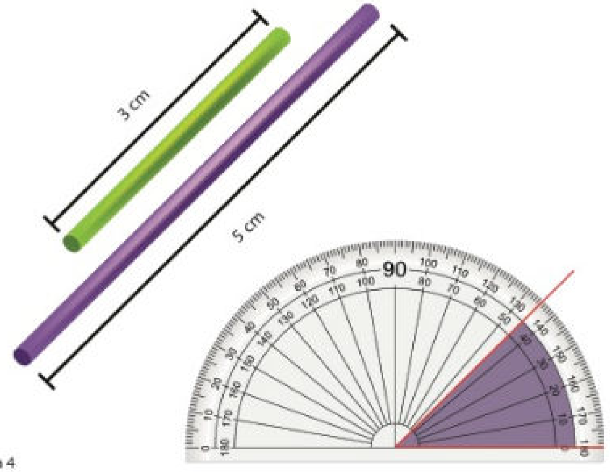


Figura 4

a) ¿Cuál es la medida del segmento de recta que completa el triángulo? ________

Comparen el triángulo obtenido con el de otros equipos.
b) ¿Cuáles son las medidas de los tres lados?________________
c) ¿Cuáles son las medidas de los ángulos?________________
d) ¿Consideran que es posible construir otro triángulo diferente con las mismas medidas y el mismo ángulo? ¿Por qué?________________

Comprueben su respuesta construyendo otro triángulo con el material empleado.
e) ¿Qué pueden analizar al comparar los dos triángulos?
f) ¿Consideran que dados dos lados de un triángulo y el ángulo que forman es posible construir triángulos diferentes? Justifiquen su respuesta.
g) Si se sabe que en dos triángulos las medidas de dos lados y el ángulo comprendido entre estos son iguales, ¿qué puede decirse de los dos triángulos?

4. A partir de los elementos de la Figura 5 construyan un triángulo.

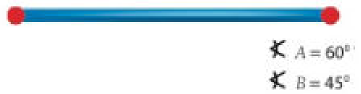


Figura 5

a) ¿Cuál es la medida del otro ángulo interior de este triángulo?
b) ¿Cuáles son las medidas de los tres lados?

Comparen el triángulo que construyeron con el de otros equipos.
c) ¿Qué relación existe entre el triángulo que construyeron con el de cualquier otra pareja?
d) Si la medida de los ángulos se intercambia, es decir, si ahora el ángulo A mide 45° y el ángulo B 60°, ¿cómo será el triángulo obtenido?

Verifiquen su respuesta realizando las modificaciones indicadas.
e) Dada la medida de dos ángulos y el segmento de recta comprendido entre ellos, ¿cuántos triángulos se pueden construir?
f) Si se sabe que en dos triángulos las medidas de dos ángulos y el lado comprendido entre estos son iguales, ¿cómo son entre sí dichos triángulos?

Comparen sus respuestas con otros equipos y discutan con ellos sus reflexiones acerca de las características de los triángulos que construyeron. Con ayuda de su profesor escriban una conclusión de manera grupal. Al terminar, compárenla con la información de la sección Herramientas.

Herramientas

Existen tres criterios para establecer que dos triángulos son congruentes:

Criterio Lado, Lado, Lado (L, L, L): Si los tres lados de dos triángulos tienen la misma medida, entonces ambos triángulos son congruentes.

Criterio Lado, Ángulo, Lado (L, A, L): Dos triángulos son congruentes si tienen la medida de dos lados y el ángulo que forman entre ellos, respectivamente, iguales.

Criterio Ángulo, Lado, Ángulo (A, L, A): Si en dos triángulos la medida de dos ángulos y la longitud del segmento entre estos son iguales, respectivamente, entonces los triángulos son congruentes.

AUTOEVALUACIÓN

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Realicé correctamente las construcciones de triángulos, empleando el juego de geometría.		
Analicé el criterio de congruencia de triángulos por medio de la construcción de triángulos a partir de la medida de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.		
Establecí el criterio de congruencia de triángulos basado en los triángulos construidos a partir de la medida de dos ángulos y el segmento comprendido entre ellos.		

Vitaminas

De manera individual, resuelve las siguientes situaciones:

1. Carlos y Felipe construyen, cada uno, un triángulo sabiendo que dos de sus lados miden 8 y 5 cm, respectivamente y la medida del ángulo formado por ellos es de 120°. Al terminar, calculan las áreas; Carlos dice que el triángulo construido tiene un área de 17.65 cm², mientras que Felipe dice que son 17.32 cm², ¿quién tiene la razón?

   a) Para comprobar tu respuesta, construye en tu cuaderno un triángulo con las características indicadas.
   b) ¿Cuál es la medida del tercer lado?
   c) ¿Qué criterio te garantiza que el triángulo que construiste es congruente con el que se describe?
   d) ¿Qué puedes concluir acerca del área y perímetro de dos triángulos congruentes?

2. En tu cuaderno, diseña dos rampas triangulares que tengan dos ángulos con valores de 60° y 30°, y que contengan un segmento de recta de 5 cm. Compara con tus compañeros las rampas que cada uno construyó.
   a) ¿Son diferentes? ¿Por qué?
   b) Estas rampas triangulares, ¿pueden ser congruentes y semejantes? Justifica tu respuesta.
   c) ¿Cuál es la medida del tercer ángulo de cada rampa?
   d) ¿Qué criterio de congruencia es útil para saber que dos triángulos son congruentes con la información que se proporciona al principio?

Compara con tus compañeros tus respuestas y comenta los procedimientos que seguiste para construir triángulos a partir de cierta información, así como los criterios de congruencia que utilizaste.

Organícense en parejas para resolver los siguientes problemas.

5. Con ayuda de su juego geométrico, tracen en una hoja de color un triángulo cuyos ángulos midan 80°, 70° y 30°, respectivamente.

Al terminar el trazo, recorten el triángulo obtenido y compárenlo con el de otra pareja.
a) ¿Cómo son entre sí los triángulos?
b) ¿Cuáles son las medidas de los tres lados?

En su triángulo identifiquen los lados como D, E y F y como D', E' y F' los correspondientes en el triángulo de sus compañeros.
Calculen las razones entre lados, perímetros y áreas, con esa información completen la Tabla 3.

Triángulo	Razón entre lados	Razón entre perímetros	Razón entre áreas
	$\frac{D}{D'}=$	$\frac{P}{P'}=$	$\frac{A}{A'}=$
	$\frac{E}{E'}=$		
	$\frac{F}{F'}=$		

Tabla 3

c) ¿Qué sucede con las razones entre los lados de los triángulos?
d) ¿Qué pueden analizar con respecto a la razón entre los perímetros?
e) Con respecto a la razón entre áreas, ¿qué pueden concluir?
f) ¿A qué consideran que se deba esto?

Comparen su triángulo con el de otra pareja y repitan el análisis anterior.

g) ¿Qué pueden concluir acerca de la razón entre perímetros y áreas de triángulos semejantes?

Comparen con otros compañeros sus respuestas y discutan con el resto del grupo qué sucede con las razones de los lados correspondientes, perímetros y áreas de figuras semejantes.

Para concluir

1. Realiza las siguientes construcciones, cuando sea posible.

   a) Dos triángulos cuyos ángulos midan 55°, 65° y 75° y sus lados respectivos sean proporcionales.
   b) Dos triángulos que tengan dos ángulos con medidas 53° y 90°.
   c) Un triángulo cuyos lados midan 3, 5 y 7 cm, y sus correspondientes en otro 6, 10 y 14 cm.
   d) Los lados de un triángulo miden 1, 2 y 3 cm y los correspondientes en otro 2, 4 y 6 cm.
   e) En un triángulo dos de sus lados miden 4 y 5 cm, y en el otro los correspondientes miden 8 y 10 cm, respectivamente.
   f) Dos lados de un triángulo miden 3 y 7 cm y el ángulo formado por ellos es de 65°, en el otro los lados correspondientes miden 4 y 8 cm y forman el mismo ángulo.
   g) Dos lados de un triángulo miden 6 y 9 cm y en el otro los lados correspondientes miden 3 y 4.5 cm, ambos pares de lados forman un ángulo de 70°.

Compara con tus compañeros las figuras que obtuvieron.
- ¿En qué casos no fue posible construir los triángulos? Justifiquen su respuesta.
- ¿En qué casos obtuvieron triángulos semejantes? Argumenten.

Con ayuda de tu profesor, establezcan de manera grupal los criterios de semejanza de triángulos.

Ángulo, Ángulo: ____________________

Lado, Lado, Lado: ____________________

Lado, Ángulo, Lado: ____________________

RDT

Visita la página electrónica http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_2_t_3.html (última consulta: 23 de enero de 2013).
En la página anterior encontrarás construcciones de triángulos basadas en las propiedades de semejanza. Comparte en clases tus impresiones acerca del uso del programa interactivo y comenta tus dudas y conclusiones.

2. En parejas dibujen un triángulo cualquiera y en un papelito escriban tres medidas del triángulo que construyeron. Entreguen el papelito a otra pareja para que con esos datos construyan un triángulo. Analicen los procedimientos que siguen sus compañeros para construir los triángulos y comprueben que las construcciones sean correctas. Participen activamente resolviendo el desafío que otros compañeros les planteen. Al terminar, comparen los triángulos obtenidos.

a) ¿En qué casos obtuvieron triángulos congruentes? ______________________________

b) ¿Con qué datos obtuvieron triángulos semejantes? ______________________________

Con el apoyo de su profesor, comenten sus conclusiones de manera grupal.

RDT

Visita la siguiente dirección electrónica: http://www.hdt.gob.mx/GuiaSecundaria/guia/html/oda.html?id=SA3_MA_B1_OA_10008 (última consulta: 9 de noviembre de 2013).
En el recurso digital interactivo podrás aplicar los diferentes criterios de congruencia para inferir la igualdad de triángulos a partir de datos conocidos.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre el análisis de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos.

____

Lección 4 | Análisis de diferentes representaciones de una misma situación

Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

Ventana

En parejas resuelvan la siguiente actividad.

1. Analicen la gráfica de la Figura 1 en la que se describe la relación entre el número de láminas de metal para repujado y el costo de cada una.

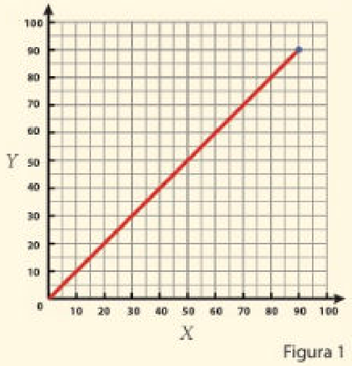


Figura 1

a) ¿Qué tipo de relación existe entre el número de láminas y el precio de los mismos?
b) ¿Qué sucede cuando aumenta o disminuye la cantidad de láminas con respecto al precio?
c) ¿Cuál es el precio de cada lámina?
d) ¿Cuántas láminas se pueden comprar con $100.00?
e) ¿Cuánto se tiene que gastar para comprar 24 láminas?
f) ¿De qué manera les sirvió el análisis previo de la gráfica de la Figura 1 para calcular estos valores?

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y discutan acerca de la relación que identificaron. De igual forma, reflexionen sobre las características de las relaciones directamente e inversamente proporcionales.

Conexiones

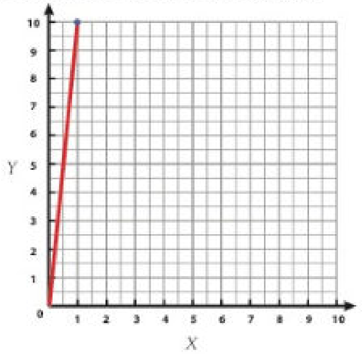
Retoma los contenidos que estudiaste en la lección 6 del bloque 3 y en la lección 4 del bloque 4 de segundo grado, acerca de relaciones de proporcionalidad.

:: | Manos a la obra

Continúen trabajando en parejas para resolver los siguientes desafíos.

1. Analicen las siguientes gráficas de las Figuras 2 y 3 que relacionan el número de láminas con el peso total de las mismas.

Figura 2



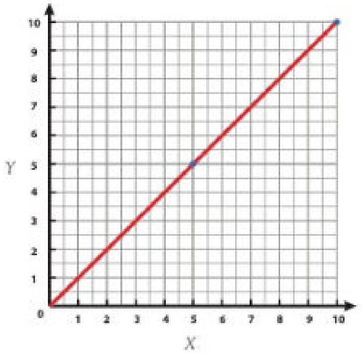


Figura 3

a) ¿Qué similitudes y diferencias pueden analizar entre las dos gráficas?
b) ¿Qué tipo de relación entre valores describe cada una de las gráficas?
c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad de cada gráfica?
d) ¿Consideran que las dos gráficas describen la misma situación? ¿Por qué?
e) Si se tiene como dato que una lámina de cierto material pesa 0.1 kg, ¿qué gráfica les parece más útil para analizar la relación entre el número de láminas y el peso de éstas? ¿Por qué?
f) ¿Cuánto pesarán 26 láminas de este material?
g) ¿Qué procedimiento siguieron para calcular este valor?

2. La gráfica de la Figura 4 describe el viaje a velocidad constante que lleva a cabo un camión de pasajeros de la comunidad de San Fernando hacia la capital del estado.

a) Si en el eje de las abscisas se describe el tiempo en minutos y en el eje de las ordenadas los kilómetros recorridos, ¿cuál es la constante de proporcionalidad en esta situación?
b) ¿Qué tipo de relación proporcional existe entre los valores de tiempo y distancia representados en la gráfica de la Figura 4?

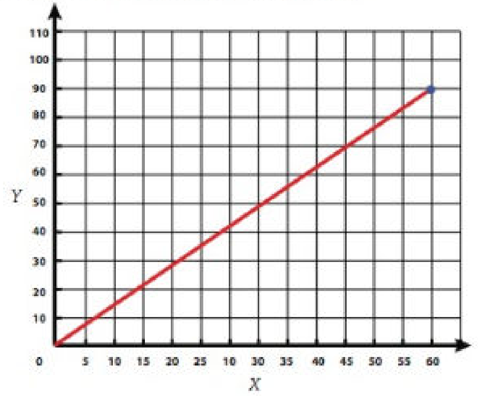


Figura 4

c) ¿Qué expresión algebraica pueden construir para describir esa situación? ______
______
d) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido el camión de pasajeros al transcurrir media hora de viaje?______
e) ¿A qué velocidad viaja este camión?______
f) Cuando transcurra una hora y media, ¿qué distancia habrá recorrido el camión?

Tomando en cuenta sus reflexiones sobre la gráfica de la Figura 4, determinen cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.

- "El camión de pasajeros viaja a una velocidad de 60 km/h" ______
- "Después de 20 minutos el camión ha recorrido 30 km" ______
- "Después de 40 minutos el camión ha viajado 60 km" ______
- "En una hora de viaje el camión ha recorrido 40 km" ______

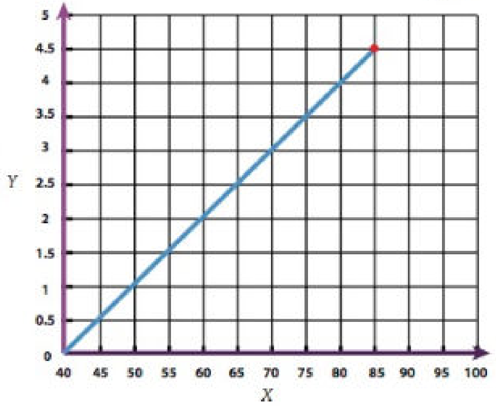
g) ¿Qué procedimientos siguieron para analizar las afirmaciones anteriores?

3. En la clase de Física, los alumnos de segundo grado del Instituto Lázaro Cárdenas midieron el aumento en la longitud de una barra de metal cuando se aumenta la temperatura de la misma. Los resultados se muestran en la gráfica de la Figura 5.

Con base en el análisis de la gráfica anterior, contesten:

a) ¿Qué datos se describen en cada uno de los ejes?
b) ¿Qué relación existe entre el aumento en la longitud de la barra y la temperatura?
c) ¿Cómo llegaron a esta conclusión?
d) ¿Qué sucede cuando la temperatura de la barra aumenta o disminuye?
e) ¿Qué longitud tiene la barra de metal a los 70 °C?
f) ¿Qué temperatura es necesaria para que la longitud de la barra de metal aumente 2.5 cm?
g) ¿Qué expresión algebraica describe esta situación?
h) ¿Cuál es el aumento en la longitud de la barra cuando la temperatura aumenta 1 °C?

Figura 5



Comparen sus respuestas y comenten con sus compañeros los procedimientos que siguieron para identificar las relaciones entre los datos en cada una de las situaciones anteriores. De igual forma, discutan, con la guía de su profesor, qué procedimiento siguieron para deducir los valores de las expresiones algebraicas y cuál consideran que es la utilidad de conocer estos valores.

En equipos, analicen y resuelvan las siguientes actividades.

4. En la carrera anual del 16 de septiembre, un equipo de ciclismo viaja a velocidad constante y cada cierta distancia se miden los tiempos de recorrido, registrando los datos obtenidos en la Tabla 1.

Tiempo (min)	30	45		120
Distancia (km)	20		60	

Tabla 1

a) ¿Qué tipo de relación existe entre el tiempo y la distancia en esta situación?
b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ______
c) ¿Cómo calcularon este valor? ______
d) ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas describen la relación entre la distancia y el tiempo de esta situación?

$$d = 1.5t$$
$$d = 0.66t$$
$$d = 2t$$

e) ¿Con base en qué criterios determinaron la expresión algebraica que describe esta situación?
f) A partir de la expresión algebraica que escogieron, calculen cuántos kilómetros habrá recorrido el equipo de ciclismo después de 180 min de competencia.
g) ¿Y cuántos kilómetros después de 4 horas?
h) Indiquen qué tiempo le lleva al equipo recorrer 300 km.
i) Si el recorrido de la carrera es de 540 km, ¿cuánto tiempo les llevará terminar la competencia?
j) Si la velocidad con la que viaja el equipo de ciclismo no es constante y varía dependiendo del camino por el cual transitan, ¿la relación sigue siendo proporcional? Justifiquen su respuesta.

5. Analicen la siguiente expresión algebraica que describe la relación entre la distancia que recorre un avión de pasajeros y el tiempo que le toma realizar este recorrido.

- $d = 680t$

Tiempo (h)	1.5	2	3
Distancia (km)	1 065	1 420	2 130

Tabla 2

Tiempo (h)	1.5	2	3
Distancia (km)	1 065	1 420	2 130

Tabla 3

a) ¿Cuáles de las tablas anteriores describen los datos de la expresión algebraica?
b) ¿Qué procedimiento siguieron para identificar esta tabla?
c) ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido el avión de pasajeros cuando hayan transcurrido 7 horas de viaje?
d) ¿Cuántas horas de viaje le toma a este avión recorrer 1 000 km?
e) ¿Y 5 000 km?
f) ¿Qué procedimiento siguieron para calcular estos valores?

6. Analicen las siguientes gráficas que describen relaciones entre diversos valores.

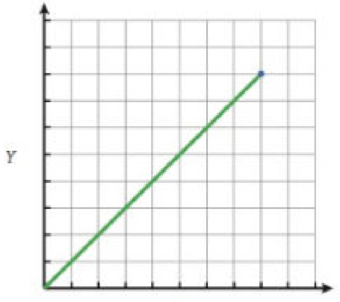


Figura 6

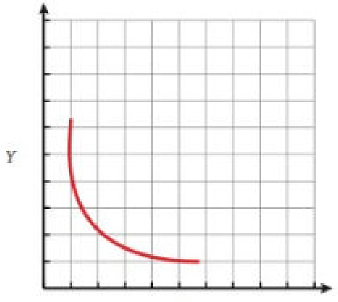


Figura 7

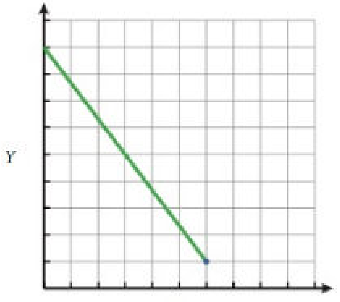


Figura 8

a) ¿Cuáles gráficas de las figuras 6, 7 y 8 describen una relación proporcional?
b) ¿Cuáles gráficas de las figuras 6, 7 y 8 describen una relación directamente proporcional?
c) ¿Cuáles gráficas de las figuras 6, 7 y 8 no describen una relación proporcional?
d) ¿Con base en qué criterios enunciaron sus respuestas?

7. Analicen las siguientes representaciones:

RDT

Visita la siguiente dirección electrónica: http://www.hdt.gob.mx/new_media/telesecundaria_1/matematicas_b5/oda_2911_1m_b05_t02_s01_video/recurso/ (última consulta: 9 de noviembre de 2013). Encontrarás un video que te ayudará a profundizar acerca de diferentes representaciones de una relación de proporcionalidad directa.

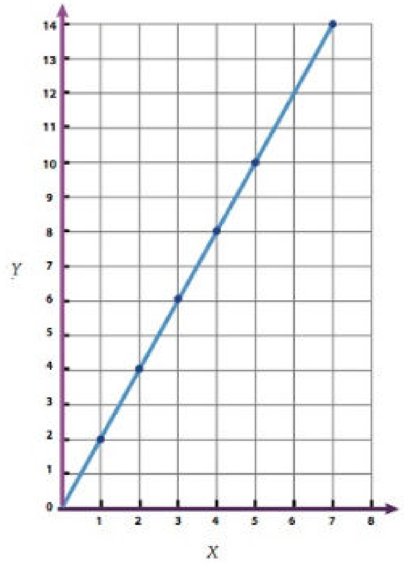


Figura 9

x	1	5	7
y	2	10	14

Tabla 4

- $y = 2x$

a) ¿Consideran que las representaciones anteriores describen la misma situación? Justifiquen su respuesta.
b) ¿Qué tipo de relación proporcional se describe en cada una de las representaciones anteriores?
c) Si se requiere calcular el valor de y cuando x toma el valor de 15, ¿cuál de las representaciones anteriores consideran más útil para describir una relación entre valores? ¿Por qué?

Comparen con sus compañeros sus respuestas y comenten entre ustedes los procedimientos que siguieron para identificar las relaciones de proporcionalidad, así como las diferentes representaciones que pueden ser utilizadas para describir una misma situación.

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Analicé las diferencias entre las situaciones que son directamente proporcionales de otras que no lo son, con base en diferentes representaciones.		
Reflexioné acerca de las diferentes representaciones que pueden describir una misma situación.		
Expresé los procedimientos que seguí para identificar las relaciones entre valores que pueden ser descritas mediante diferentes representaciones.		

AUTOEVALUACIÓN

Vitaminas

Resuelve las siguientes situaciones de manera individual.

1. Con base en la siguiente gráfica, construye en tu cuaderno una expresión algebraica que describa los valores de la misma. De igual forma, elabora una tabla con al menos cinco coordenadas de las descritas en la gráfica de la Figura 10.

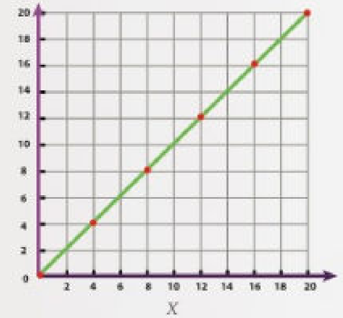


Figura 10

   a) ¿Qué tipo de relación se describe en las tres representaciones que has utilizado?
   b) ¿Las representaciones describen la misma situación?

2. En una industria de producción de bases aromáticas, una de las actividades diarias de mantenimiento es el llenado de un tanque de agua para abastecer a los reactores químicos. El tanque cuenta con cierto volumen de agua y la expresión algebraica que describe esta situación es la siguiente:

$$y = 250 + 650x$$

El flujo de agua es de 650 litros por hora. En tu cuaderno construye una tabla que describa esta situación y una gráfica que ilustre de otra manera la misma situación.

   a) ¿Qué tipo de relación existe entre los valores que tabulaste y graficaste?
   b) ¿Cuántos litros de agua se han almacenado después de 7 horas?
   c) ¿Cuánto tiempo se necesita para almacenar 2 200 litros de agua?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenta qué representaciones consideras que te son más útiles para describir diversas situaciones.

Para concluir

Resuelve la siguiente actividad.

1. El papá de Miguel colabora en las operaciones de carga y descarga en un puerto. Los contenedores para transportar diversas mercancías pesan alrededor de 2.2 toneladas.

   a) ¿Qué expresión algebraica describe el peso total de un número determinado de contenedores?

Completa la Tabla 5 con los datos que se piden.

# Contenedores	1	2		5	
Peso (Ton)			4.4		17.6

Tabla 5

Con base en tus resultados, construye en tu cuaderno una gráfica que describa esta situación.

   b) ¿Qué relación existe entre estos valores?
   c) ¿Cuánto pesarán 12 contenedores de este tipo?
   d) ¿Cuántos contenedores juntos pesan 85.4 toneladas?
   e) ¿Cuál de las representaciones te pareció más útil para calcular nuevos valores?

Compara tus resultados con los de tus compañeros y comenta con ellos los procedimientos que seguiste para construir diferentes representaciones de una misma situación, así como cuál te fue más útil para calcular otros valores.

Reúnanse en parejas y diseñen un desafío matemático, en el cual ustedes construyan una gráfica, una tabla o una expresión algebraica y, con base en la representación que utilicen, pidan a sus compañeros que construyan otras representaciones. Con la misma disposición resuelvan el desafío que sus compañeros les planteen.

RDT

Visita la página electrónica http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/1esomatematicas/1quincena11/index1_11.htm (última consulta: 30 de enero de 2013).
En la página anterior hay animaciones de construcción y análisis de gráficas a partir de datos de tablas y viceversa. Comparte con tus compañeros tu experiencia acerca del uso del programa interactivo y comenta tus dudas y conclusiones.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre el análisis de una misma situación mediante diferentes representaciones.

____

Lección 5 | Representaciones de variaciones cuadráticas

Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

Conexiones
En primer grado analizaste cómo trazar triángulos y cuadriláteros mediante el uso del juego de geometría. Retomar esos apuntes te facilitará las construcciones de figuras en esta lección.

Ventana

De manera individual, analiza y resuelve los siguientes desafíos:

1. Los datos que se muestran en las siguientes tablas describen los pesos de tres materiales distintos. Escoge las expresiones algebraicas que describen estos conjuntos de valores.

x	y
0	0
1	1.5
2	3
3	4.5
4	6
10	15

Tabla 1

x	y
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12
10	30

Tabla 2

x	y
0	0
1	0.5
2	1
3	1.5
4	2
10	5

Tabla 3

$y = 1.5x$ $\quad$ $y = 0.5x$ $\quad$ $y = 3x$

$y = \frac{x}{2}$ $\quad$ $y = \frac{x}{3}$ $\quad$ $y = 4x$

a) ¿Qué procedimiento seguiste para identificar la expresión algebraica que describe la relación entre los valores en cada tabla?
b) ¿Qué tipo de relaciones hay entre los valores de cada tabla?
c) ¿Cuáles son las constantes de proporcionalidad en cada caso?
d) ¿Qué término de cada una de las expresiones algebraicas corresponde a las constantes de proporcionalidad?
e) ¿A qué consideras que se deba esto?

Compara tus resultados con los de tus compañeros y describe los procedimientos que seguiste para relacionar las expresiones algebraicas con las tablas, así como las relaciones proporcionales que analizaste.

Manos a la obra

Reúnanse en equipos para resolver los desafíos.

1. Los alumnos de la asignatura de Ciencias 1 están analizando lo que sucede con dos muestras de diferentes cultivos de bacterias y su crecimiento, al transcurrir determinado tiempo. Los datos recabados se muestran en la Tabla 4.

Tiempo (min)	Muestra A	Muestra B
0	0	0
1	2	1
3	6	9
5	10	25
10	20	100

Tabla 4

a) ¿Qué relación existe entre el tiempo y los valores de la muestra A?
b) ¿Es la misma relación que existe entre el tiempo y los valores de la muestra B? ¿Por qué?
c) Escribe las expresiones algebraicas que describen la relación entre el tiempo y el crecimiento de bacterias correspondiente a cada muestra. ______

Con base en sus expresiones algebraicas, completen los datos faltantes de la Tabla 5.

Tiempo (min)	Muestra A	Muestra B
60		
120		

Tabla 5

d) ¿Cómo pueden describir la relación entre los conjuntos de datos, tiempo y muestra B?

2. Un grupo de paracaidismo está realizando cálculos con relación al tiempo que debe transcurrir para abrir sus paracaídas después de aventarse de la avioneta que los transporta y a qué distancia deben estar del suelo cuando ocurra esto.

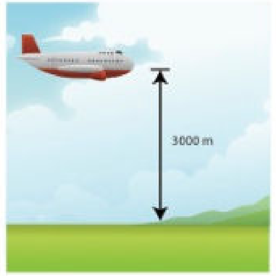


Figura 1

Al medir las distancias y los tiempos obtuvieron los datos de la Tabla 6.

Tiempo (s)	0	1	2	3	4
Distancia recorrida (m)	0	5	20	45	80

Tabla 6

a) ¿Qué relación existe entre el tiempo y la distancia recorrida?
b) ¿Qué expresión algebraica describe la relación que existe entre el tiempo y la distancia recorrida en esta situación?

c) ¿Qué procedimiento siguieron para construir su expresión algebraica?

Con base en su expresión algebraica, completen la Tabla 7.

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Distancia recorrida (m)	0	5	20	45	80						
Altura	3 000	2 995									

Tabla 7

Si el paracaídas debe ser abierto alrededor de los 1 500 m del suelo.

d) ¿Cuántos segundos después del salto deberán abrir su paracaídas?

e) Si se tardan un segundo más en abrir su paracaídas, ¿a qué distancia se encontrarán del suelo?

f) Si en lugar de un paracaidista se avienta un objeto pesado, aproximadamente ¿cuánto tiempo tardará en llegar al suelo?

g) ¿Qué procedimientos siguieron para calcular los valores anteriores?

Comparen con sus compañeros sus respuestas, comenten sus reflexiones con respecto a las relaciones cuadráticas que acaban de analizar y los procedimientos que emplearon para construir las expresiones algebraicas que las representan. Con la guía de su profesor, discutan de manera grupal qué sucede cuando un objeto o cuerpo cae desde cierta altura hacia el suelo.

AUTOEVALUACIÓN — Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Analicé las relaciones cuadráticas que existen entre dos conjuntos de valores.		
Identifiqué y construí expresiones algebraicas que describen las relaciones entre dos conjuntos de valores.		
Expresé los procedimientos que seguí para identificar las relaciones cuadráticas entre conjuntos de valores, así como la construcción de sus expresiones algebraicas.		

Organícense en parejas para resolver las siguientes actividades.

3. En el Instituto Lázaro Cárdenas, el profesor de Química proyecta un video acerca de cómo se compone la materia. Para ello, utiliza un proyector y la pared del auditorio de la escuela. El profesor y los alumnos analizan que entre más cerca está el proyector de la pared, la imagen es más pequeña, por lo que realizaron unas pruebas para medir el tamaño de la pantalla proyectada en la pared. Las pruebas se pueden observar en la Figura 2 y los datos registrados en la Tabla 8.

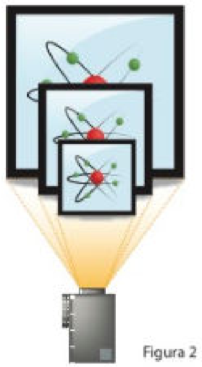


Figura 2

Distancia del proyector a la pared (m)	1	2	3
Área de la imagen proyectada (m^2)	4	16	36

Tabla 8

a) ¿Qué relación existe entre la distancia del proyector a la pared y el área de la imagen que se proyecta en la pared?

b) ¿Qué expresión algebraica describe la relación entre la distancia del proyector a la pared y el área proyectada de la imagen?

c) ¿A qué distancia deben colocar el proyector para que la imagen ocupe un área óptima de 20 m^2?

d) Si colocan el proyector a 1.5 m de la pared, ¿qué área debe proyectar?

Utilizando la expresión algebraica que construyeron, completen la Tabla 9.

Distancia del proyector a la pared (m)	0.5	1.5	2.5	3.5
Área de la imagen proyectada (m^2)		1		

Tabla 9

e) ¿Cuál consideran que es la ventaja de contar con una expresión algebraica que describe la relación cuadrática entre los conjuntos de datos?

4. Una compañía de publicidad tiene varios modelos de lonas para anuncios. El modelo más común es un cuadrado de 1 m^2 de área, y cada modelo aumenta gradualmente 1 m por lado, como se observa en la Figura 3.

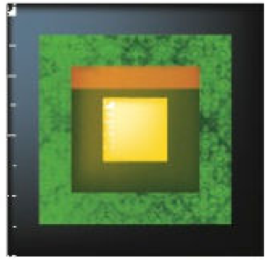


Figura 3

El área de cada lona varía como se puede analizar en la Tabla 10.

Medida de lado (m)	1	2	3	4	5
Área de la lona (m^2)	1	4	9	16	25

Tabla 10

a) ¿Qué relación existe entre la medida del lado y el área de la lona?

b) ¿Qué expresión algebraica describe la relación entre la medida del lado y el área de la lona?

c) Si un cliente decide ordenar una lona personalizada de 2.5 m de lado, ¿cuál será el área de la lona?

d) Si por el contrario, otro cliente lo que necesita es que la lona cubra un área de 30.5 m^2, ¿cuánto debe medir de lado la lona?

5. Un carpintero está trabajando en una mesa cuadrada de medida de lado x. Como es normal, algunos clientes quieren mesas personalizadas a los tamaños que a ellos les parecen estéticamente mejor. Uno de ellos pide que se aumente en tres unidades un lado de la mesa y en cuatro unidades el otro lado de la mesa, tal y como se muestra en la Figura 4.

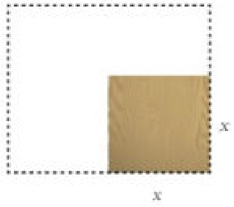


Figura 4

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que describe el área de la mesa?
b) ¿Qué procedimiento siguieron para construir esta expresión algebraica?
c) ¿Consideran que con esta expresión algebraica el carpintero puede calcular el área de cualquier otro pedido? ¿Por qué?

Completen la Tabla 11 con lo que se pide.

Medida de lado 1	x	$x+3$	$x+4$	$x+6$
Medida de lado 2	x	$x+4$	$x+4$	$x+3$
Expresión algebraica	$y=x^2$			

Tabla 11

d) Si un cliente desea una mesa que tenga cinco unidades más en cada lado, ¿cuál es la expresión algebraica para calcular el área de la mesa?
e) ¿Qué diferencias y similitudes pueden apreciar entre las dos expresiones algebraicas que construyeron?

Comparen sus resultados y comenten con sus compañeros los procedimientos que siguieron para construir expresiones algebraicas que describen relaciones cuadráticas, con base en la información proporcionada en diferentes contextos.

Vitaminas

De manera individual, analiza y resuelve los siguientes problemas:

1. Los alumnos de tercer grado analizan que el campo de deportes de su escuela mide 20 m más de largo que de ancho y saben que el área total del campo es de $y = 3\,500$ m².
   a) ¿Cuáles son las dimensiones del campo?
   b) ¿Qué procedimiento tienes que seguir para calcular estos valores?
   c) ¿Qué tipo de expresión algebraica describe esta situación?

Si la escuela está ampliando sus instalaciones deportivas, y semestre con semestre aumentan el largo del campo en 5 m, ¿cómo se irá modificando el área del campo de deportes?

Completa la Tabla 12 con las ampliaciones del campo en los siguientes cuatro semestres.

Ampliación del campo	+5	+10	+15	+20
Expresión algebraica	$y=$	$y=$	$y=$	$y=$
Área del campo (m²)				

Tabla 12

Compara con tus compañeros tus respuestas, comenta con ellos los procedimientos que seguiste para construir tu expresión algebraica, así como el tipo de relación que existe entre el área y la medida de un lado.

Para concluir

Analiza y resuelve el siguiente desafío:

1. Un terreno rectangular en las afueras de la comunidad de San Fernando, en donde se planea construir un parque temático ecológico, mide de perímetro 4000 m. Uno de los lados de este terreno tiene una longitud de x metros, tal y como se observa en el modelo de la Figura 5.

Figura 5

a) ¿Qué expresión algebraica puede representar la relación entre el área (y) y el valor de x?

Compara tu expresión algebraica con las siguientes e identifica si alguna de ellas coincide con la que tú construiste.

$y = x(2000 - x)$ $\quad$ $y = 2000x - x^2$ $\quad$ $y = x(4000 - x)$ $\quad$ $y = 4000x - x^2$

b) ¿Algunas de las expresiones anteriores son equivalentes a la tuya?
c) ¿A qué consideras que se debe esto?

Compara tus resultados y comenta con tus demás compañeros los procedimientos que seguiste para construir una expresión algebraica que describe la relación entre el valor de x y el área del terreno, con base en los datos iniciales.

En parejas, diseñen un desafío matemático, en el cual proporcionen una expresión algebraica cuadrática y pidan que sus compañeros completen una tabla utilizando esta expresión o viceversa. Deben tomar en cuenta que las relaciones entre los conjuntos de datos sea cuadrática. Participen con sus compañeros resolviendo el desafío que les presenten.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre la representación gráfica y tabular de relaciones cuadráticas.

Lección 6 | Escala de probabilidad y tipos de eventos

Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

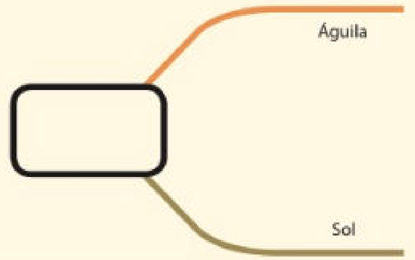
Conexiones

En el bloque 2 de segundo grado realizaste experimentos aleatorios para analizar la probabilidad frecuencial y teórica. Es recomendable retomar esos conceptos ya que te serán de utilidad a lo largo de esta lección.

Ventana

En parejas analicen y resuelvan los eventos siguientes.

1. Se realiza un evento aleatorio del lanzamiento simultáneo de dos monedas.
   a) ¿Cuáles son los resultados posibles?
   b) ¿Cómo consideran que se conocen a todos los resultados posibles de un evento aleatorio?
   c) ¿Qué tipo de representaciones pueden utilizar para representar todos los resultados posibles en un evento aleatorio?



Lanzamiento	Resultado	Resultado	Resultado	Resultado
Moneda 1				
Moneda 2				

Tabla 1

   d) ¿Qué pueden analizar al completar las representaciones anteriores?
   e) ¿Cómo pueden calcular y expresar la probabilidad de obtener un resultado u otro?
   f) ¿Cuál es la utilidad de conocer con anticipación la probabilidad de un evento?

Comparen sus resultados con el resto de sus compañeros y comenten los procedimientos que llevaron a cabo para completar las representaciones anteriores.

Asimismo, comenten de qué manera o maneras se puede expresar la probabilidad de un evento.

:: | Manos a la obra

Continúen trabajando en parejas y realicen los siguientes experimentos aleatorios.

1. Con base en el evento anterior, del lanzamiento de dos monedas de manera simultánea, analicen cada una de las reflexiones siguientes y contesten expresando la probabilidad en forma de fracción.

   a) La probabilidad de obtener sol en alguna de las monedas es de: ____________
   b) La probabilidad de obtener una sola águila es de: ____________
   c) La probabilidad de obtener dos soles o dos águilas es de: ____________

Tomando en cuenta sus resultados anteriores, contesten:

   d) ¿Existe un evento que tenga mayor probabilidad de ocurrir que otro? Justifiquen su respuesta.
   e) ¿Qué procedimiento siguieron para contestar lo anterior?

2. Realicen el lanzamiento de tres monedas de manera simultánea y, empleando el procedimiento que deseen, determinen el número de resultados posibles. Con base en sus resultados, calculen la probabilidad de ocurrencia de cada evento de la Tabla 2, expresen sus resultados mediante fracciones, decimales y porcentajes.

Probabilidad de obtener...	Fracción	Decimal	Porcentaje
Ninguna águila			
Tres águilas			
Dos soles y un águila			
Dos caras iguales			

Tabla 2

   a) ¿Qué representación utilizaron para determinar el número posible de resultados?
   b) ¿Qué representación de probabilidad les parece más útil?
   c) Con base en sus análisis, ¿qué evento tiene la mayor probabilidad de ocurrir?
   d) ¿Habrá algunos eventos que tengan la misma probabilidad de ocurrir? Justifiquen su respuesta.
   e) ¿Habrá algún evento que tenga el 0% o el 100% de probabilidad de ocurrir? ¿Por qué?

3. Realicen el lanzamiento de un dado cúbico para analizar y registrar las probabilidades de ocurrir de algunos resultados.
   a) ¿Cómo consideran que se conoce al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio?
   b) ¿Cuál es la probabilidad, expresada en porcentaje, de obtener un número par, así como la probabilidad de sacar un número impar?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número primo?
   d) ¿Qué evento tiene el 100% de probabilidad de ocurrir? Justifiquen su respuesta.
   e) ¿Cómo consideran que se conoce a un resultado que con certeza puede ocurrir?
   f) ¿Y a los resultados que no pueden ocurrir bajo ninguna circunstancia?

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros así como las diferentes representaciones que utilizaron para expresar una probabilidad. Comenten sus reflexiones acerca de la probabilidad de que un evento ocurra o que no ocurra y cómo se definen dichas situaciones.

Herramientas

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, y se representa con la letra E.
Ejemplo: Lanzamiento de una moneda, E = {águila, sol}

Reúnanse en parejas para analizar los siguientes experimentos aleatorios.

4. Retomen la actividad del análisis sobre el lanzamiento de un dado y respondan:
   a) ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento aleatorio?
   b) ¿Cuántos resultados posibles componen el espacio muestral del lanzamiento de un dado?
   c) ¿Consideran que el espacio muestral se modifica si se tiran dos dados?

Completen la Tabla 3 en con los resultados posibles del lanzamiento de dos dados.

	1	2	3	4	5	6
1	(,)					
2						
3						
4						
5						
6						

Tabla 3

   d) ¿Cuál es el espacio muestral que se genera al lanzar dos dados?
   e) ¿Cuántos resultados posibles componen el espacio muestral del lanzamiento de dos dados?
   f) ¿Cuál consideran que es la utilidad de conocer el espacio muestral de un experimento aleatorio?
   g) ¿Qué procedimientos pueden llevar a cabo para saber el espacio muestral?

5. Con base en el análisis del espacio muestral, del lanzamiento de dos dados, calculen las siguientes probabilidades:
   a) La probabilidad de obtener dos números pares (fracción).
   b) La probabilidad de obtener un número par y un número impar (decimal).
   c) La probabilidad de obtener un número primo (porcentaje).
   d) ¿Qué evento tiene el 100% de probabilidad de ocurrir? Justifiquen su respuesta.
   e) ¿Cómo se conocen a los resultados que no pueden ocurrir bajo ninguna circunstancia en un experimento aleatorio?
   f) Tomando el 0 y el 1 como base, ¿qué número puede describir un evento seguro y cuál un evento imposible de ocurrir?

Herramientas

La medida numérica de que un evento X ocurra o suceda cuando se realiza un experimento aleatorio se conoce como probabilidad del evento o suceso y se denota como $P(X)$, la cual toma valores que van del 0 al 1.
Ejemplo: En el lanzamiento de una moneda, la probabilidad de obtener una águila: $P(\text{águila}) = 0.5$, $P(A) = 0.5$.

6. En su cuaderno, registren el espacio muestral que se genera al sumar las caras obtenidas cuando se lanzan dos dados. Indiquen los elementos que corresponden a cada uno de los siguientes sucesos o eventos:
   - X (número primo):
   - X (número mayor a 6):
   - X (número par):
   - X (número mayor a 10):

   a) ¿Qué procedimiento siguieron para identificar los elementos de cada evento?
   b) ¿Por qué consideran que los elementos varían dependiendo del evento que se analiza?

Considerando el mismo experimento, calculen las probabilidades siguientes utilizando la notación analizada.

- P (12) =
- P (7) =
- P (1) =
- P (13) =

   c) ¿Qué procedimiento siguieron para calcular cada una de las probabilidades anteriores?
   d) ¿Qué evento tendrá la probabilidad del 100%? Justifiquen su respuesta.
   e) ¿Qué representación se les hace más útil para comunicar la probabilidad de un evento de ocurrir? ¿Por qué?

Comparen con sus compañeros sus respuestas y compartan con ellos sus reflexiones acerca de la notación para describir el espacio muestral de un evento aleatorio y la probabilidad de ocurrencia de un evento.

Reúnanse en equipo para llevar a cabo los siguientes experimentos aleatorios.

7. Analicen nuevamente los resultados posibles del lanzamiento de un dado cúbico y contesten lo siguiente:
   a) ¿Cuál es el espacio muestral de este evento?
   b) ¿Cuáles son los posibles resultados de obtener un número mayor o igual a 4?
   c) ¿Cuáles son los posibles resultados de obtener un número menor o igual a 4?
   d) Completen el conjunto de resultados posibles para cada evento:
      - Evento A: Obtener un número par. A= { }
      - Evento B: Obtener un 6.
      - Evento C: Obtener un número primo.
      - Evento D: Obtener un número impar.
   e) ¿Consideran que es posible que el evento A y B sucedan al mismo tiempo? ¿Por qué?
   f) ¿Es posible que el evento A y D se lleven a cabo en el mismo instante? Justifiquen su respuesta.
   g) ¿Cuáles de los eventos A, B, C, y D pueden ocurrir al mismo tiempo?
   h) ¿Cuáles de los eventos A, B, C, y D no pueden ocurrir al mismo tiempo?

Herramientas

Se denomina **evento complementario** del evento A, a aquel evento que contiene a todos los elementos del espacio muestral que no están en el evento A.

Dos eventos son **mutuamente excluyentes** si no ocurren simultáneamente o si no tienen elementos en común, por lo que la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro. De igual forma, si la probabilidad de que un evento ocurra no es afectada por el resultado de otro evento, se dice que son **eventos independientes**.

En tu biblioteca

Consulta el libro de Kjartan Poskitt, *Esa condenada mala suerte*, México, SEP/Abrapalabra Editores (2005); para ampliar el tema acerca de probabilidades y el azar.

8. Continúen trabajando con un dado y describan los resultados posibles para los eventos que se enuncian:
   - Evento 1: Obtener un número mayor que 4.
   - Evento 2: Obtener un número menor que 4.

   a) ¿Qué características tienen estos dos eventos?
   b) ¿Cuál es la suma de la P(1) + P(2)?
   - Evento 3: Obtener el número 5.
   - Evento 4: Obtener un número distinto de 5.

   c) ¿Qué características comparten los eventos 3 y 4 con los eventos 1 y 2?
   d) ¿Cuál es el valor de la P(3) + P(4)?
   e) ¿Qué concluyen respecto a la suma de las probabilidades en ambos casos?
   f) ¿Cómo consideras que se denominan los eventos 1 y 2 y cómo los eventos 3 y 4? ¿Por qué?

9. Se lanza una moneda tres veces seguidas y se obtienen un águila, un sol y un águila.
   a) ¿Qué probabilidad existe de que en el cuarto lanzamiento se obtenga un sol?
   b) ¿Consideran que los resultados anteriores pueden influenciar el cuarto lanzamiento? ¿Por qué?
   c) Si en tres lanzamientos seguidos se obtienen sólo águilas, ¿cuál es la probabilidad de obtener otra águila en el siguiente lanzamiento?
   d) Las tres primeras águilas, ¿afectarán el resultado del cuarto lanzamiento? Justifiquen su respuesta.
   e) ¿Cómo se conoce a este tipo de eventos?

Comparen con sus compañeros sus respuestas y enuncien sus reflexiones con respecto a los tipos de eventos que se pueden obtener en experimentos aleatorios así como las características de los mismos.

AUTOEVALUACIÓN – Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Analicé las características de los eventos mutuamente excluyentes, complementarios y los eventos independientes.		
Analicé lo que sucede con la suma de las probabilidades de dos eventos complementarios con relación a la suma de probabilidades de dos eventos mutuamente excluyentes.		
Identifiqué los tipos de eventos según sus características y suma de probabilidades.		

Vitaminas

En forma individual, identifica los tipos de eventos que se estudian.

1. Recorta cinco pedazos de papel y enuméralos del 1 al 5. Analiza el espacio muestral formado por todos los posibles resultados al sustraer un pedazo de papel y enuncia:
   - Evento A: obtener un número impar:
   - Evento B: obtener un número par:
   - Evento C: obtener un número primo:

   a) ¿Qué eventos son complementarios?
   b) ¿Qué eventos son mutuamente excluyentes?
   c) ¿Cuáles son las P(A), P(B) y P(C)?
   d) ¿Qué eventos no son mutuamente excluyentes?

2. En una bolsa se han colocado dos pelotas rojas, dos pelotas blancas, dos azules, dos verdes y dos negras.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota blanca?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos pelotas blancas?
   c) ¿Qué par de eventos pueden ser complementarios?
   d) ¿Qué par de eventos son mutuamente excluyentes e independientes?
   e) ¿Cuál puede ser un evento seguro?
   f) ¿Cuál puede ser un evento imposible en este experimento aleatorio?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros y comenten sus reflexiones acerca de los tipos de eventos que pueden ocurrir en un experimento aleatorio.

Para concluir

Reúnete con otro compañero para analizar los siguientes experimentos aleatorios y describan qué tipo de eventos son los que se indican.

1. Lanzamiento de un dado:
   Evento $A = \{ 6 \}$ Evento $B = \{ 1, 3, 5 \}$
   a) ¿Cómo son los eventos A y B? ¿Por qué?
2. Lanzamiento de un dado y una moneda:
   Evento $C = \{ 1, S \}$ Evento $D = \{ (2, A), (3, A), (4, A), (5, A), (6, A) \}$
   a) ¿Cómo son los eventos C y D? ¿Por qué?
3. Sacar una letra del abecedario:
   Evento $E = \{ V \}$ Evento $F = \{ C \}$
   a) ¿Cómo son los eventos E y F? ¿Por qué?
   b) ¿Cómo sería un evento que no fuera independiente?

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y discutan de manera grupal las características que tienen los eventos complementarios y los eventos mutuamente excluyentes e independientes de un experimento aleatorio.

Diseñen un experimento aleatorio y describan a sus compañeros ciertos eventos para que los realicen y los analicen. Pidan que indiquen qué tipo de eventos son cada uno de los analizados. Participen activamente en la resolución de las interrogantes que sus compañeros les presenten con su experimento aleatorio.

Reflexiona

Escribe, de manera formal, tus conclusiones y reflexiones sobre los tipos de eventos que pueden suceder en un experimento aleatorio así como la manera de representarlos y la probabilidad de ocurrir.

Lección 7 | Diseño y presentación de experimentos

Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

Ventana

En parejas, analicen los resultados de la encuesta siguiente:

1. En el Instituto México se llevó a cabo una encuesta a los alumnos del tercer grado de secundaria sobre la materia que más les gusta o prefieren. Los resultados se registraron en la gráfica de la Figura 1.

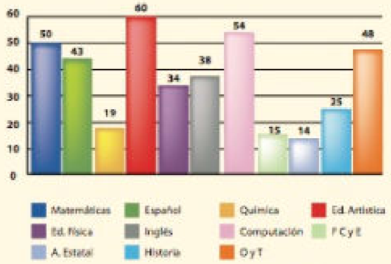


Figura 1

a) ¿Cuántos alumnos contestaron esta encuesta?
b) ¿Qué materia es la preferida por ellos?
c) ¿Qué materia es la que menos les gusta?
d) ¿Consideran que con esta representación es posible saber a cuántas niñas y niños se les aplicó esta encuesta? ¿Por qué?
e) Si la encuesta se realizara a los padres de los niños, ¿las preferencias pueden cambiar o se deben mantener? Justifiquen su respuesta.
f) En esta encuesta, ¿qué se pretende analizar, el número de materias o las preferencias?

Comparen con sus compañeros sus respuestas respecto al análisis de los resultados que se muestran en la gráfica de la Figura 1 de una encuesta realizada sobre un grupo de alumnos.

:: Manos a la obra

Reúnanse en equipos y analicen las siguientes situaciones:

1. A petición de una compañía que produce playeras deportivas, una empresa de mercadeo realiza un estudio sobre los colores favoritos en la ropa en los jóvenes. Se prevé aplicar una encuesta a 400 mujeres de entre 20 y 25 años. Supongan que ustedes trabajan en esta empresa de mercado y les fue asignado el diseño y la aplicación de esta encuesta.
   a) ¿Qué pretende lograr la empresa al aplicar esta encuesta?
   b) ¿Qué información es la que deben incluir en la encuesta?

   c) ¿De qué manera pretenden obtener esta información?
   d) ¿Cuál es la población en este estudio?
   e) ¿Consideran que la población de estudio incluye también a hombres de entre 20 y 25 años? ¿Por qué?
   f) ¿Cuál consideran que es la etapa en la que se define la población de estudio?

Analicen los resultados de la encuesta aplicada a la población de estudio en las siguientes gráficas.

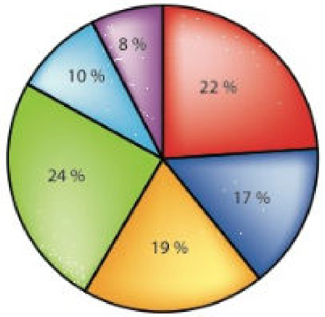


Figura 2

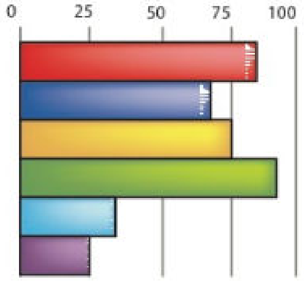


Figura 3

   g) ¿Cuál consideran que es la importancia de presentar la información recabada con diferentes herramientas?
   h) ¿Es suficiente la información presentada para analizar los resultados de la encuesta? Justifiquen su respuesta.

2. Daniela quiere conocer las preferencias de los estudiantes sobre qué páginas electrónicas visitan al momento de realizar sus investigaciones escolares. Ayuden a Daniela a diseñar su encuesta.
   a) ¿Cuál debe ser la población de estudio, las páginas de Internet o los usuarios?
   b) ¿A cuántas personas les harían la encuesta?
   c) ¿Cuáles consideran que deben ser las edades de los encuestados? ¿Por qué?
   d) ¿Qué cantidad de encuestados consideran que puede considerarse como una muestra representativa de la población para estudiar sus preferencias? Justifiquen su respuesta.
   e) ¿Consideran que el número de individuos de una muestra es menor que el número de individuos de la población? ¿Por qué?
   f) Una vez que se recaba la información, ¿cuáles consideran que son las herramientas que pueden utilizar para presentarla?
   g) ¿De qué consideran que dependerá el tipo de representación que deben usar?

3. Una empresa de control de calidad realiza una encuesta a las afueras de varias estaciones de Metro de la Ciudad de México, con la finalidad de dar a conocer la percepción de los pasajeros con respecto a la limpieza, comodidad, calidad y la seguridad del servicio que utilizan diariamente. Analicen las características del estudio:
   a) ¿Cuál es la población de estudio?
   b) ¿Cuál es la característica que debe reunir un conjunto de elementos para ser una población de estudio? ¿Cuál consideran que es una muestra representativa de la población?

Glosario

población. Grupo o conjunto de elementos que son sometidos a un experimento o un estudio.

Glosario

muestra. Subconjunto representativo de la población que se está estudiando o analizando.

c) ¿Qué tipo de muestra se debe elegir para este estudio?
d) ¿Cómo consideran que se debe llevar a cabo el muestreo?

Para aplicar la encuesta se utilizó el formato que se muestra en la Tabla 1.

	Por favor, conteste basándose en la escala que se propone.				
	Excelente (5)	Bueno (4)	Regular (3)	Malo (2)	Pésimo (1)
¿Cómo considera la limpieza de las estaciones?					
¿Cómo considera la comodidad de los vagones?					
¿Qué calificación le daría al servicio dentro y fuera de las estaciones					
¿Cómo considera la seguridad en las estaciones?					

Tabla 1

Glosario

muestreo. Reunión de los resultados que se desea analizar, obtenidos de una parte reducida y representativa de la población de estudio.

Con base en las escalas que se presentan en esta encuesta, contesten:
e) ¿Cuál consideran que es una buena representación para presentar los resultados?

Supongan que a partir del análisis de los resultados se expresan los enunciados siguientes:
- La seguridad en las estaciones se percibe de BUENA a EXCELENTE, ya que se obtuvo una media aritmética de 4.5.
- La limpieza de las estaciones se percibe como REGULAR, ya que se obtuvo una media aritmética de 3.

f) ¿Qué herramientas se usaron para analizar y presentar los resultados?

Comparen con otros equipos sus respuestas y discutan de manera grupal los conceptos de población y muestra, así como las características de la población de estudio y los diferentes tipos de muestra que se pueden tomar de una población para su análisis y estudio.

Herramientas

La muestra puede ser **voluntaria** si responden las personas interesadas en expresar sus opiniones o preferencias; por **conveniencia** si se escoge la muestra de acuerdo a la cercanía o confianza, y al **azar** si se escogen aleatoriamente.

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Analicé las características que debe tener un conjunto de elementos para ser considerado una población de estudio.		
Analicé que un subconjunto de la población puede ser tomada como muestra de estudio sólo si es representativa de la población.		
Identifiqué los diferentes tipos de muestras de una población que pueden ser estudiadas.		

AUTOEVALUACIÓN

Vitaminas

En parejas analicen las siguientes situaciones:

1. Retomen el estudio de las preferencias con respecto a las materias. Diseñen y realicen una encuesta para aplicar a sus compañeros en el salón. Una vez terminado su muestreo, registren su información en su cuaderno utilizando las herramientas que consideren pertinentes y, posteriormente, presenten a sus demás compañeros su información para contrastarla con la que ellos recabaron.
   a) ¿Qué tipo de preguntas o enunciados incluyeron en su encuesta?
   b) ¿Cuál fue su población de estudio?
   c) ¿De qué tamaño fue la muestra que escogieron? ¿Por qué?
   d) ¿Incluyeron en su muestra a toda su escuela? ¿Por qué?
   e) ¿Qué tipo de muestra analizaron?
   f) Presenten sus resultados al resto de sus compañeros.

2. Supongan que la siguiente representación de resultados, registrada en la Tabla 2, es el análisis de un estudio similar realizado en el Instituto Hidalgo a compañeros de su misma edad.

Asignatura	Preferencias
Español	10.47 %
Ciencias con énfasis en Química	9.98 %
Educación Artística	12.71 %
Educación Física	10.49 %
Inglés	11.96 %
Computación	13.47 %
Formación Cívica y Ética	7.14 %
Orientación y Tutoría	6.57 %
Matemáticas	8.92 %
Historia	8.29 %
Total	100.00 %

Tabla 2

   a) ¿Es suficiente la información para inferir el tamaño de la muestra?
   b) Aunque no se conozca el tamaño de la muestra, ¿es posible saber cuál fue la población? Justifiquen su respuesta.
   c) ¿Qué herramientas se utilizaron para presentar la información?

Comenten con otros compañeros sus respuestas y reflexiones acerca de los procedimientos que siguieron para diseñar, aplicar una encuesta y presentar información recopilada.

Continúen trabajando en parejas para realizar las siguientes actividades:

4. Una empresa dedicada a la publicidad desea conocer las preferencias de los estudiantes de secundaria de la comunidad de San Fernando con respecto a las actividades que realizan en su tiempo libre. Supongan que les han encargado esta tarea a ustedes, por lo que deben presentar el resultado de su estudio a sus compañeros.

Deduzcan la población, el tamaño de muestra y contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál fue la población que eligieron para estudio y por qué?
b) ¿Qué tamaño tenía su muestra?
c) ¿Qué tipo de muestra utilizaron parar recabar información?
d) ¿Cuáles fueron algunas de las preguntas que utilizaron en su encuesta para recabar información?

Presenten su trabajo al resto del grupo.

e) ¿Qué herramientas pueden utilizar para presentar su información?

En grupo discutan los siguientes tópicos:

- ¿Cuáles consideran que son las mejores herramientas para presentar la información recabada, mediante una encuesta o experimento?
- ¿Cuál consideran que es un tamaño de muestra aceptable para obtener resultados significativos?
- ¿Cuál es la importancia de definir correctamente la población de estudio, así como la forma de muestreo?

¿Sabías que..?

Los gobiernos y las instituciones públicas emplean encuestas para conocer las opiniones, las preferencias o los problemas de la sociedad y a partir de los resultados, tomar decisiones o diseñar políticas públicas que respondan a las necesidades de la población.

5. Una compañía que fabrica bicicletas pretende realizar un estudio mediante la aplicación de una encuesta a una población en específico, para conocer el medio de transporte que usan más comúnmente para transportarse al trabajo. Ustedes son los encargados del diseño de la encuesta, así como de la definición de la población, tamaño de muestra y tipo de muestreo a realizar a fin de obtener resultados importantes para esta compañía.
   a) ¿Qué población definieron como la que se estudiará mediante una encuesta?
   b) ¿Qué parámetros o factores es importante analizar al momento de definir una población de estudio?
   c) ¿La población de estudio sería la misma si el objetivo del estudio es conocer el medio de transporte que usan para trasportarse a la escuela? Justifiquen su respuesta.
   d) ¿Qué tamaño de muestra consideran que es suficiente para conocer las preferencias de esta población?
   e) ¿Cómo van a realizar su muestreo? ¿Por qué?
   f) ¿Qué tipo de preguntas deben incluir en su encuesta? Enuncien 3 de ellas.

Simulen su experimento y recaben los datos pertinentes a este estudio. Escojan una herramienta para presentar su información y presenten a sus demás compañeros.

Comenten entre ustedes las diferencias y similitudes que pudieron apreciar al comparar sus estudios con el resto de sus compañeros, tanto en la población elegida para su análisis como en el tamaño de muestra, tipo de muestreo y herramientas para presentar su información.

Para concluir

En parejas analicen lo que se plantea en el siguiente estudio:

1. Una universidad quiere realizar un estudio para conocer las preferencias sobre las carreras que los estudiantes pretenden estudiar al ingresar a la educación superior, por lo que diseña una encuesta para aplicar a la población de estudio.
   a) ¿Cuál es esta población de estudio?
   b) ¿Ustedes incluirían alumnos de secundaria en esta población? Justifiquen su respuesta.
   c) Si la población es muy grande, ¿en qué beneficia o perjudica analizarla toda?
   d) ¿Qué tamaño de muestra consideran que es suficiente para saber las carreras que tienen más aceptación entre los estudiantes?
   e) ¿Cómo llevarían a cabo el muestreo para aplicar esta encuesta?

Simulen este experimento y presenten a sus compañeros la información recabada para comparar las herramientas que utilizaron para presentar su información.

   f) ¿A qué atribuyen que unos compañeros pueden informar que la carrera más popular es la de Medicina y otros compañeros la de Administración?
   g) ¿Consideran que hay parámetros o factores que pueden influir en las respuestas de los alumnos? ¿Por qué?
   h) Enumeren algunos de estos parámetros o factores que identifican como influyentes al momento de contestar una encuesta y compárenlos con las de sus compañeros.

Comparen con otros compañeros sus respuestas, así como las representaciones que utilizaron para comunicar su información al resto del grupo. Con ayuda de su profesor, discutan cuándo es más conveniente utilizar una u otra representación gráfica o tabular y a qué se debe esto.

RDT

Visita la página http://www.inegi.org.mx/inegi/contenidos/Investigacion/Experimentales/Bienestar/default.aspx (última consulta: 5 de febrero de 2013).
Analiza las características del estudio sobre Bienestar subjetivo, la población de estudio, el tamaño de la muestra, etcétera. Comenta con tus compañeros acerca del diseño y la utilidad de este estudio. Explora los recursos que existen en la página electrónica y comparte tus experiencias en clase.

Reflexiona

Escribe, de manera formal, tus conclusiones y reflexiones acerca del diseño de una encuesta y cómo obtener conclusiones a partir de los resultados obtenidos.

Primera parte

Responde las preguntas y describe las operaciones necesarias para resolver los siguientes problemas:

Biocombustibles

1. En una empresa de biocombustibles el fondo de uno de los tanques de almacenamiento tiene las medidas que se observan en la Figura 1.

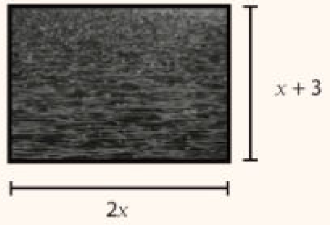


Figura 1

a) ¿Qué expresión algebraica modela el cálculo del área del fondo del tanque?
b) Si se sabe que el área del fondo del tanque tiene 176 m² de área, ¿cuáles son las dimensiones del tanque?

Se analiza el rendimiento que tienen algunos modelos de vehículos con el biocombustible que se produce en la empresa. Los datos se registran en la Tabla 1.

Gasolina (litros)	3	4	5	40
Distancia (km)	67.5	90	112.5	900

Tabla 1

c) ¿Qué distancia se puede viajar con 1 litro de biocombustible?
 a) 30 km b) 20.5 km c) 22.5 km d) 21.5 km

Azar

2. En una bolsa se han colocado 6 pelotas de colores, como se muestra en la Figura 2. Se realiza el experimento que consiste en extraer una pelota de la bolsa y anotar su color. Considera los siguientes eventos:

- Evento A: obtener una pelota roja o una azul.
- Evento B: obtener una pelota azul.
- Evento C: obtener una pelota verde.

a) ¿Los eventos A y B son mutuamente excluyentes? ¿Pueden ser complementarios? Argumenta.
b) ¿Los eventos B y C son mutuamente excluyentes? Justifica tu respuesta.
c) Subraya el par de eventos que son complementarios.
 I. Eventos A y C II. Eventos A y B III. Eventos B y C

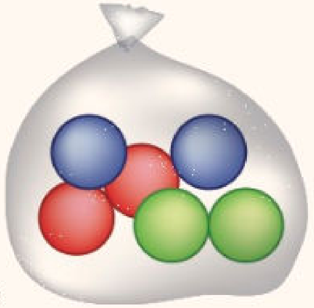


Figura 2

Segunda parte

De las respuestas que se proponen, escoge la opción correcta y márcala con una ✓.

1. En una comunidad se planea reforestar el área de un terreno como el de la Figura 3. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas sirve para calcular las medidas de este terreno?
 a) $x(x + 5) - 4 = 32$ c) $x(x + 5) - 2 = 32$
 b) $(x + 5) - 4 = 32$ d) $(x + 5) - 4x = 32$

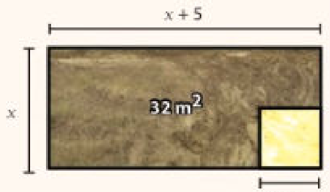


Figura 5

Figura 3

2. Una compañía de juguetes didácticos planea producir en mayor tamaño el conjunto de triángulos de bolsillo que se muestra en la Figura 4. Reproduzcan en su cuaderno los mismos triángulos pero con las medidas al cuádruple. ¿Cuánto mide el perímetro de la figura resultante?
 a) 120 cm b) 108 cm
 c) 112 cm d) 124 cm

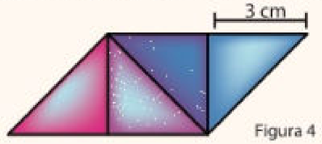


Figura 4

3. En la Tabla 2 se han registrado los datos de la relación entre distancia y tiempo de la caída libre de un objeto que se ha lanzado desde lo más alto de un edificio, ¿qué expresión algebraica describe la relación tiempo y distancia de este movimiento?

Tiempo (s)	0	1	2	3	4
Distancia (m)	0	5	20	45	80

Tabla 2

 a) $d = 4t^2$ b) $d = 5t^2$ c) $d = t^2 + 2$ d) $d = t^2 + 5$

4. En el experimento aleatorio del lanzamiento de un dado cúbico de seis caras, se tienen los siguientes eventos:
 Evento A: Obtener un número par, evento B: obtener un número impar.
 ¿Cómo son los eventos A y B?
 a) Complementarios b) Mutuamente excluyentes c) Independientes d) Simples

EVALUACIÓN

Solicita a tu profesor que evalúe tus aprendizajes esperados, proporcionándote indicaciones y sugerencias para mejorar.	Incipiente	Endesarrollo	Logrado
Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas.			
Identifica relaciones de proporcionalidad a través de diferentes representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas).			
Identifica relaciones cuadráticas a través de representaciones algebraicas y tabulares.			
Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.			
Sugerencias:			

BLOQUE 2

Aprendizajes esperados	
	• Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan. • Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.
COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN:	• Resolver problemas de manera autónoma. • Comunicar información matemática. • Validar procedimientos y resultados. • Manejar técnicas eficientemente.

	CONTENIDOS		DOSIFICACIÓN BIMESTRAL
LECCIÓN 1	Uso de ecuaciones cuadráticas	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	
LECCIÓN 2	Rotación y traslación	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	
LECCIÓN 3	Construcción de diseños usando diferentes transformaciones	Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figura.	
LECCIÓN 4	Áreas de cuadrados sobre los lados de un triángulo	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	
LECCIÓN 5	Teorema de Pitágoras	Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.	
LECCIÓN 6	Cálculo de probabilidades	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).	

Lección 1 | Uso de ecuaciones cuadráticas

Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

Ventana

En parejas, analicen las siguientes situaciones.

Conexiones
En la lección 1 del bloque anterior resolviste problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas, es importante que revises tus apuntes para retomar esos conocimientos.

1. El terreno de una planta de biocombustibles tiene forma cuadrada y se sabe que su área es ocho veces la medida de su lado, como se muestra en la Figura 1.

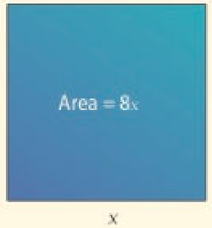


Figura 1

a) Escriban la ecuación que describe la situación anterior. ______
b) Analicen las ecuaciones siguientes e indiquen si alguna también representa dicha situación.

$$x^2 = 8x$$
$$x^2 - 8x = 0$$
$$x(x - 8) = 0$$

c) ¿Qué tipo de ecuaciones son las anteriores?
d) Escriban los argumentos en los que basaron su respuesta. ______
e) ¿Cuál o cuáles son las posibles soluciones de estas ecuaciones? ______
f) ¿Cuáles son las dimensiones del terreno en hectómetros? ______

2. El cuádruple del área de un cuadrado menos ocho veces la medida de su lado es igual a cero.
a) Escriban la ecuación cuadrática que describe esta situación. ______
b) ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado? ______
c) Expliquen, en su cuaderno, el procedimiento que siguieron para calcular este valor.
d) Ahora reescriban su ecuación como el producto de dos factores ______
e) ¿Alguna de las soluciones de la ecuación se relaciona con los términos de los factores? Justifiquen.

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y las ecuaciones cuadráticas que modelaron. Discutan de manera grupal los procedimientos que siguieron para calcular las soluciones de dichas ecuaciones. Analicen las ecuaciones obtenidas en los dos problemas y observen si tienen una forma en común. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

:: Manos a la obra

Continúen trabajando en parejas para resolver las siguientes situaciones.

1. El área de una planta de energía solar tiene el siguiente diseño que se muestra en la Figura 2.

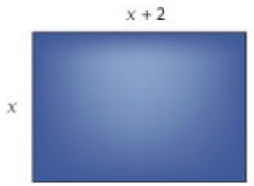


Figura 2

Conexiones
En la lección 2 del bloque 3 de segundo grado estudiaste la factorización de algunas expresiones algebraicas, revisa tus apuntes o tu libro, ya que esos contenidos te serán de utilidad en esta lección.

a) Si el área de esta planta es de 80 u^2, ¿qué ecuación cuadrática modela esta situación? ______
b) ¿Qué procedimiento pueden seguir para despejar x de esta ecuación cuadrática?
c) ¿Cuántas soluciones tiene esta ecuación cuadrática?
d) Verifiquen cuál solución es válida para resolver esta situación. Justifiquen su respuesta.
e) ¿Cuál es la medida de cada lado de esta planta de energía solar?

2. Una empresa que se dedica al reciclado de papel para su reutilización en cuadernos ecológicos, ha ganado este año cinco unidades más que el año pasado. El producto de lo que ganaron el año pasado y lo que ganaron este año, es igual a 17 veces la cantidad que ganaron el año pasado.
a) ¿Qué ecuación cuadrática modela esta situación? ______
b) ¿De qué manera pueden factorizar esta ecuación para encontrar sus soluciones?
c) ¿Consideran que esta ecuación cuadrática se puede resolver sin factorizar cada uno de los términos que la componen?, ¿por qué?
d) ¿Cuánto ganaron en cada uno de los años en esta empresa?

3. La edad de Santiago multiplicada por la edad de Fernando que tiene dos años más que él, y acaba de ingresar a la primaria, es igual a seis veces la edad de Santiago.
a) ¿Qué ecuación modela esta situación? ______
b) Igualen con cero la ecuación que obtuvieron.
c) Escriban el lado que es distinto de cero como el producto de dos factores.
d) Con base en la información de la sección Herramientas, justifiquen por qué es válido igualar a cero cada uno de los factores obtenidos en el inciso anterior.
e) ¿Cuántas soluciones tiene esta ecuación cuadrática?
f) ¿Es la solución de esta ecuación la edad de Fernando? Justifiquen su respuesta.
g) ¿Cuáles son las edades de Santiago y de Fernando? ______

Herramientas
Si el producto de dos números es igual a cero, entonces alguno de los números o los dos deben de ser cero.

$ab = 0 \rightarrow a = 0$ o $b = 0$

4. En clase de Matemáticas, al equipo de Margarita le plantean el siguiente problema para modelarlo con ecuaciones cuadráticas y resolverlo con factorización. El problema dice así:
"¿Cuál será la medida del lado de un cuadrado si se sabe que el cuádruple de su área es igual a 16 veces la medida del lado?"
   a) ¿Qué ecuación cuadrática puede resolver esta situación? ____________________
   b) ¿Qué procedimiento pudo seguir el equipo de Margarita para factorizar esta ecuación?
   c) ¿Cuál consideran que es la utilidad de factorizar este tipo de ecuaciones cuadráticas?
   d) ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado y de su área?
   e) ¿Cuáles son las similitudes y las diferencias con las ecuaciones cuadráticas que modelaron en los ejercicios 2 y 3 de esta actividad?

Acerca de...

Educación ambiental para la sustentabilidad. La búsqueda de fuentes alternativas de energía, responde a la preocupación por contribuir a la conservación, uso y manejo sustentable de recursos naturales.

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y comenten los tipos de ecuaciones cuadráticas que han analizado, modelado y factorizado hasta el momento. De igual forma, discutan de manera grupal y con la guía de su profesor la utilidad de la factorización cuando se trabaja con ecuaciones cuadráticas para resolver determinadas situaciones.

Reúnanse en equipos para analizar y resolver las siguientes situaciones planteadas.

5. Un vivero especializado en cultivos que sirven para producir biocombustibles tiene un área delimitada para cada tipo de cultivo como se muestra en la Figura 3.

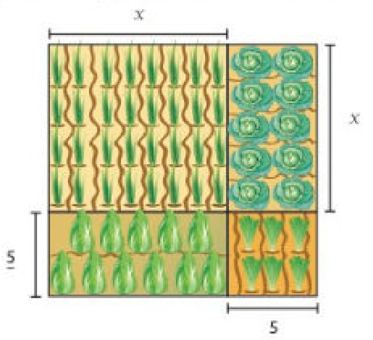


Figura 3

   a) ¿Qué expresiones algebraicas describen la base y la altura de la periferia de este vivero? ____________________
   b) ¿Qué pueden analizar al comparar estas expresiones algebraicas?
   c) ¿Qué expresión algebraica obtienen al multiplicar cada uno de los factores para describir el área del vivero?
   d) Comparen la forma de la ecuación obtenida con las de la actividad anterior e indiquen sus diferencias y similitudes.
   e) Si la expresión algebraica que representa el área del vivero fuera $x^2 + 14x + 49$, ¿cuáles serían las dimensiones de sus lados?

6. En un sector del vivero anterior han decidido ampliar las dimensiones del diseño original de acuerdo con lo que se puede observar en la Figura 4.

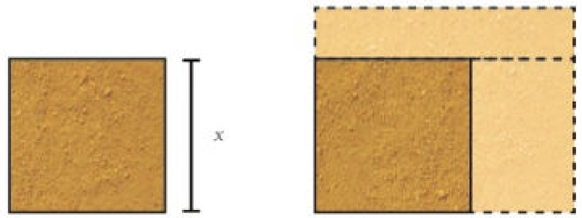


Figura 4

   a) Si se aumentaron 2 m de largo y 1 m de ancho, ¿qué expresión algebraica describe las medidas de la base y la altura de la figura geométrica que se formó?
   b) ¿Qué producto de factores describe el área de este nuevo sector del vivero?
   c) ¿Qué ecuación de segundo grado se obtiene al multiplicar estos factores?
   d) ¿Consideran que existe relación entre el aumento de las medidas de largo y ancho y los coeficientes de la ecuación cuadrática que modelaron para describir el área del nuevo sector del vivero? Justifiquen su respuesta.
   e) Con base en la reflexión anterior, indiquen de qué manera pueden factorizar la siguiente ecuación: $x^2 + 5x + 6$, para describir el aumento de medidas de los lados de otro sector del vivero.
   f) ¿Cuánto aumentaron las medidas de cada lado del nuevo sector del vivero?

7. En un terreno aledaño al vivero donde se producen cultivos para biocombustibles, se planea realizar una perforación con la finalidad de encontrar agua y así poder asegurar el suministro necesario para el riego diario de los cultivos que ahí se producen. El área destinada para la perforación, así como las medidas del terreno, se muestran en la Figura 5.

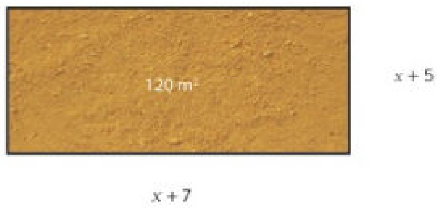


Figura 5

   a) ¿Qué ecuación modela el área del terreno destinado para la perforación?
   b) ¿Qué procedimiento pueden llevar a cabo para factorizar la ecuación anterior?
   c) ¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación cuadrática?
   d) Las dos soluciones, ¿son útiles para modelar esta situación? Justifiquen su respuesta.
   e) ¿Cuáles son las medidas de cada lado del terreno donde se realizará la perforación?
   f) De no haber utilizado la factorización, ¿qué otro procedimiento pudieron haber empleado para resolver esta situación?

8. El área del laboratorio de tejidos vegetales en donde se analizan los cultivos de este vivero está modelado por la ecuación cuadrática de la Figura 6:

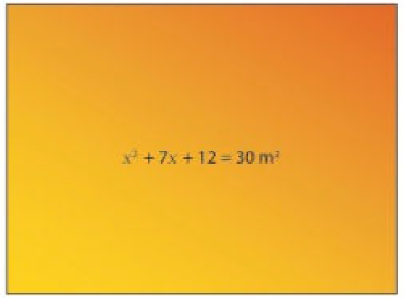


Figura 6

a) ¿Qué expresión algebraica obtienen al factorizar el lado izquierdo de la ecuación cuadrática anterior?
b) ¿Qué representan en la Figura 6 los factores que acaban de obtener?
c) Calculen las soluciones de la ecuación que modela el área del laboratorio.
d) ¿Cuál de las dos soluciones de la ecuación satisface este problema?, ¿por qué?
e) ¿Cuáles son las medidas de cada lado del laboratorio?

Comparen sus respuestas y procedimientos de factorización con las de los demás equipos. De manera grupal, discutan las diferentes maneras de calcular las soluciones de ecuaciones de segundo grado del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, y en qué ocasiones las soluciones no son válidas al resolver algunas situaciones como en el problema anterior.

RDT

Visita la siguiente dirección electrónica:
http://www.hdt.gob.mx/new_media/secundaria_3/matematicas_b2/oda_2548_10027/recurso/ (última consulta: 9 de noviembre de 2013).
En el recurso digital interactivo reafirmarás la manera de factorizar una ecuación cuadrática.

AUTOEVALUACIÓN

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Justifiqué que para calcular las soluciones de un producto de factores igualados a cero, es válido igualar cada factor a cero individualmente y resolver cada ecuación de primer grado.		
Identifiqué en qué situaciones las soluciones negativas o con valor cero no satisfacen las condiciones de los problemas planteados.		

Herramientas

Existen cuatro tipos de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, las cuales tienen dos soluciones o raíces, en el caso de la última ambas soluciones son cero.

$ax^2 + bx + c = 0$ $\quad ax^2 + bx = 0$ $\quad ax^2 + c = 0$ $\quad ax^2 = 0$

Vitaminas

De manera individual resuelve las siguientes situaciones:

1. Si el cuadrado de un número entero es igual al cuádruple del mismo número, ¿qué ecuación cuadrática describe lo anterior?
   a) Factoriza la ecuación cuadrática y calcula este número.
   b) ¿Qué procedimiento seguiste para factorizar la ecuación que construiste?
   c) ¿Existe más de una solución para esta ecuación? ¿Por qué?

2. El área de un letrero rectangular tiene las medidas que se observan en la Figura 7.

Figura 7

   a) ¿Qué ecuación cuadrática describe el área de este letrero?
   b) ¿Cuáles son las medidas de cada lado del letrero?

Compara con tus compañeros tus respuestas y comenten entre ustedes cuál consideran que es la utilidad de factorizar ecuaciones cuadráticas en el cálculo de soluciones.

Trabajen nuevamente con otro compañero para analizar y resolver las siguientes situaciones.

9. Se ha colocado una barda en la periferia del vivero y de las instalaciones para protegerlos de agentes externos. En la Figura 8 se muestran las medidas de uno de los frentes de la barda.

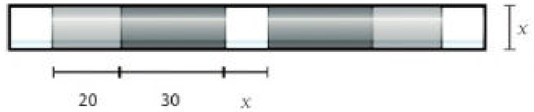


Figura 8

a) Si el área de esta parte de la barda es de 212 m², ¿qué ecuación cuadrática modela el área de esta barda?
b) ¿Qué similitudes y diferencias pueden identificar con las ecuaciones cuadráticas que han modelado hasta el momento?
c) ¿Qué procedimiento pueden seguir para factorizar o simplificar la ecuación anterior con el fin de calcular sus soluciones?
d) ¿Cuáles son las medidas de la altura y del largo de esta barda?
e) ¿Consideran que existe más de un procedimiento para simplificar o factorizar este tipo de ecuaciones de segundo grado? Justifiquen su respuesta.

10. Un carpintero tiene como trabajo construir un portón con unos tablones de madera cuya forma se muestra en la Figura 9.

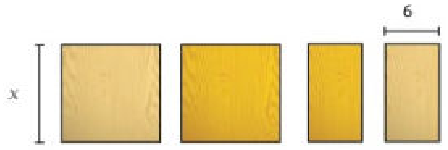


Figura 9

a) Si el área de este portón debe ser de 32 m², ¿cuál es la altura del portón?
b) ¿Qué ecuación cuadrática modela el área de todos los tablones juntos?
c) ¿Cuál es el largo de este portón?
d) ¿Qué factorización llevaron a cabo para calcular estas medidas?
e) ¿Qué consideran que deba tener cada uno de los tablones para construir una ecuación cuadrática con los datos que se proporcionan?

Comenten con el resto de sus compañeros sus resultados y las ecuaciones cuadráticas que construyeron. Discutan los procedimientos que siguieron para factorizar este tipo de ecuaciones: $ax^2 + bx + c = 0$ en donde $a > 1$.

Para concluir

Reúnete con otro compañero para resolver las siguientes situaciones.

1. Las autoridades de una comunidad están planeando establecer una reserva natural en una zona donde hay mucha diversidad de flora y fauna, esto con la finalidad de protegerlas. El terreno tiene las siguientes dimensiones que se pueden observar en la Figura 10.

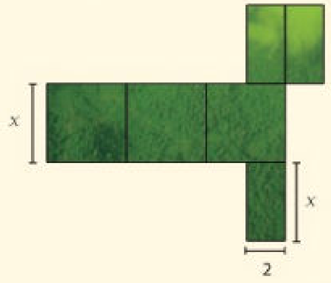


Figura 10

a) Si se sabe que el área de la reserva natural es de 5 040 m², ¿qué ecuación cuadrática modela el área de esta reserva natural?
b) ¿Qué procedimientos pueden seguir para calcular el valor de la medida?
c) ¿Cuál es el perímetro de esta reserva natural?
d) ¿Cuál fue la utilidad de resolver esta ecuación cuadrática para calcular el perímetro de la reserva natural?

2. Diseñen situaciones que requieran el uso de ecuaciones cuadráticas para su resolución.
   a) ¿Qué situación puede modelarse con la ecuación $x^2 + 3x = 10$?
   b) Calculen las soluciones o raíces de la misma.
   c) Modelen otra situación en la que pidan a sus compañeros que encuentren la ecuación cuadrática cuyas raíces sean 1, −5.

Presenten sus respuestas a otra pareja y comparen los problemas que plantearon. Analicen los procedimientos empleados para resolver cada uno. Comprueben los resultados y participen activamente resolviendo el desafío que sus compañeros les presenten. Al terminar, de manera grupal comparen sus respuestas.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones acerca del uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

Lección 2 | Rotación y traslación

Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.

Ventana

En parejas, analicen las siguientes situaciones.

1. Un campesino quiere construir un corral para ganado bovino justo a un lado y exactamente igual al corral que tiene para ganado ovino, como el que se puede ver en la Figura 1.

Figura 1

Conexiones

En segundo grado, al construir figuras simétricas respecto de un eje, analizaste y pudiste explicar las propiedades que conservan. Es recomendable que revises la lección 3 del bloque 5 de segundo grado para retomar esos conceptos.

a) ¿Qué figura formarán los corrales?
b) ¿Qué recursos pueden utilizar para construir el nuevo corral con las mismas medidas que el corral de ganado ovino?
c) ¿Cuál es el significado geométrico de la recta m?
d) ¿Cómo deben ser las medidas de los lados del nuevo corral con respecto a las medidas del corral anterior?
e) ¿Qué relación debe existir entre las medidas de los ángulos A y B en relación con los ángulos A' y B' de la nueva construcción?

Tracen el nuevo corral y comparen su construcción con la de otras parejas.

2. Una cuadrilla de construcción necesita hacer una columna con las mismas dimensiones que tiene la de la Figura 2.

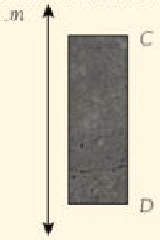


Figura 2

Construyan la columna y contesten:

a) ¿Cómo deben ser las distancias entre el eje de simetría (m) y los puntos C y D con respecto a las distancias entre m y C' y D'? ¿Cuánto debe medir el segmento $C'D'$?
b) ¿Podrá existir otro eje de simetría para construir una columna simétrica a la que se muestra? Justifiquen su respuesta.
c) ¿Cómo deben ser los ángulos C y D con respecto a los ángulos C' y D'? ¿Por qué?
d) ¿Qué tipo de figuras construyeron en estas actividades?
e) ¿Qué tipo de transformaciones o movimientos aplicaron a las figuras originales?

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros, así como sus construcciones simétricas. Analicen las similitudes que existen entre las medidas de los lados y las medidas de los ángulos de las figuras originales y las figuras simétricas.

Manos a la obra

Continúen trabajando en parejas para analizar las siguientes transformaciones.

1. El equipo de mantenimiento de un hotel tiene la tarea de mover de lugar una escultura triangular, debido a que el área en donde se encuentra actualmente va a ser remodelada.

El equipo de mantenimiento presenta varias transformaciones para mover la escultura, las cuales se muestran en la Figura 3.

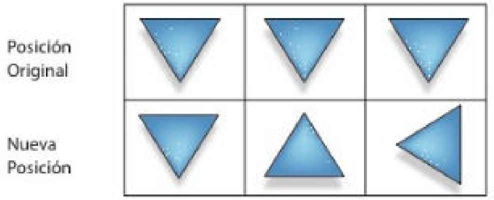


Figura 3

a) Las transformaciones o movimientos que pueden identificar en cada una de las nuevas ubicaciones, ¿son iguales? Justifiquen su respuesta.
b) ¿Qué medidas de la escultura se conservan en la nueva ubicación?
c) ¿Cómo son los lados homólogos de las esculturas en la ubicación original y en la nueva ubicación?
d) ¿Cómo son los ángulos internos de la escultura en las diferentes ubicaciones?
e) ¿A qué consideran que se deba esto?

2. La gerencia del hotel analiza la primer transformación de la Figura 3 para decidir la nueva ubicación de la escultura triangular. Para ello hacen los trazos que se muestran en la Figura 4.

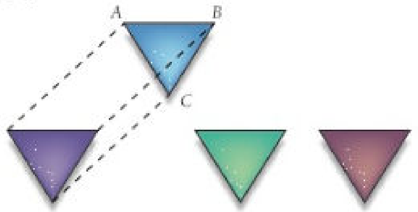


Figura 4

a) ¿Qué movimientos se muestran en la Figura 4, de traslación o de rotación?
b) ¿En qué argumentos basan su respuesta?
c) ¿Cuál es la distancia de cada movimiento en estas transformaciones?
d) Identifiquen los puntos A', B' y C' de cada una de las esculturas que se muestran.
e) ¿Qué pueden analizar respecto a las longitudes de los lados de cada escultura?
f) ¿Cómo son las medidas de los ángulos A, B, C con respecto a la medida de los ángulos A', B' y C'?
g) ¿Cómo es la recta AC con respecto a las rectas $A'C'$ de las demás esculturas?
h) ¿Qué pueden concluir acerca de la orientación de las esculturas en las nuevas posiciones con respecto a la orientación original?

Glosario

homólogos. En geometría se refiere a los lados correspondientes en dos o más figuras semejantes.
traslación. Es el movimiento de un objeto geométrico de manera que cada uno de sus puntos se mueve en la misma dirección, la misma distancia, sin alterarse su tamaño ni orientación.
rotación. Es el movimiento de giro alrededor de un punto fijo, el cual es llamado centro de rotación.

3. Después de realizar un análisis, la gerencia ha decidido que la escultura se debe colocar en la posición del triángulo azul que se muestra en la Figura 5.

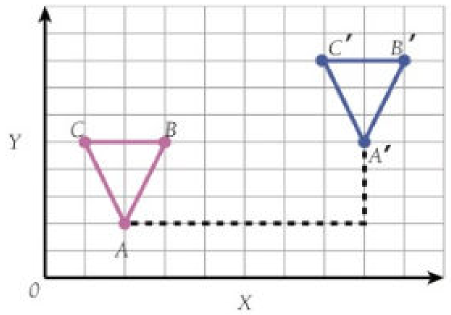


Figura 5

Con base en el análisis de la figura y considerando que cada cuadro representa 1 m, contesten:

a) ¿Qué procedimiento se llevó a cabo para trasladar la escultura original?
b) ¿Cuántos metros avanzaron en x y cuántos en y para trazar el punto A?
c) ¿A qué distancia se encuentran los puntos B' y C' de los puntos originales B y C?
d) ¿Cómo se trasladará esta escultura a una posición alternativa de modo que el vértice A se ubique en el punto $(6, -1)$. Realicen la traslación en su cuaderno.
e) ¿Qué características de una figura geométrica se conservan en un movimiento de traslación?

En otro plano se muestra la traslación de la escultura de la forma que se puede observar en la Figura 6.

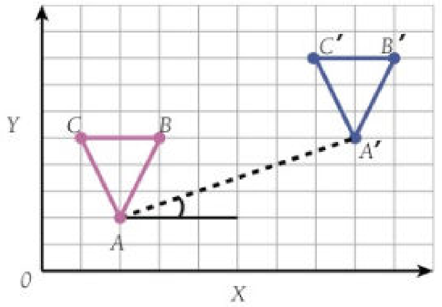


Figura 6

f) ¿Qué procedimiento se siguió para trasladar la escultura?
g) ¿A qué distancia y en qué ángulo se trasladaron los puntos B' y C'?
h) ¿Qué procedimiento consideran más adecuado para trasladar figuras geométricas? ¿Por qué?

En su cuaderno, trasladen el triángulo rosa 5 m con un ángulo de 60° y comparen su traslación con la de sus compañeros.

Comenten, en grupo, qué características de una figura se conservan cuando ésta se traslada a otra posición. De igual forma compartan sus procedimientos para llevar a cabo traslaciones. Escriban en su cuaderno las conclusiones.

En equipos analicen lo siguiente.

4. Un despacho de arquitectos está diseñando una alberca olímpica para el centro deportivo de la comunidad Arboledas. Las dimensiones de la alberca se muestran en la Figura 7.

Figura 7

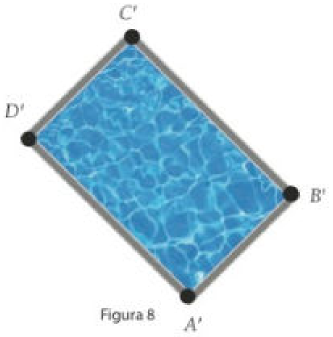


Figura 8

Algunos de los arquitectos consideran que la alberca debe orientarse de otra manera y presentan el diseño que se muestra en la Figura 8.

a) ¿Qué similitudes y qué diferencias pueden identificar entre las Figuras 7 y 8?
b) ¿Cómo son las dimensiones de una alberca con respecto a las dimensiones de la otra?
c) ¿Cómo son los ángulos en los vértices A y A'? ¿A qué consideran que se debe esto?
d) ¿Qué movimiento o transformación tuvo la alberca en el segundo diseño?

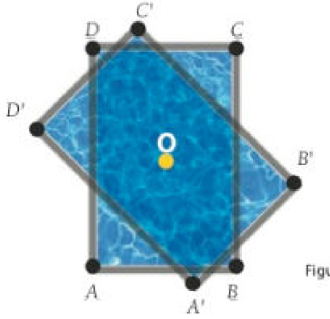


Figura 9

e) En la Figura 9, midan las distancias de cada vértice al centro O y compárenlas, ¿se verifican sus observaciones?
f) Tracen un segmento de recta que vaya del punto O hasta el punto A y otro del punto O al punto A', midan el ángulo que se forma entre estos segmentos. Realicen lo mismo con los demás puntos.
g) ¿Qué pueden identificar?

Tracen en su cuaderno la alberca original y realicen un movimiento de rotación con un ángulo de 60° y comparen con otros equipos su resultado.

5. La plaza comercial de la comunidad Arboledas tiene el diseño circular que se muestra en la Figura 10. Dicha construcción cuenta con cuatro alas de acceso, cada una dirigida a uno de los puntos cardinales. Si se identifica la entrada norte con los puntos A y B, localicen los puntos A' y B' de las entradas restantes a la plaza comercial.

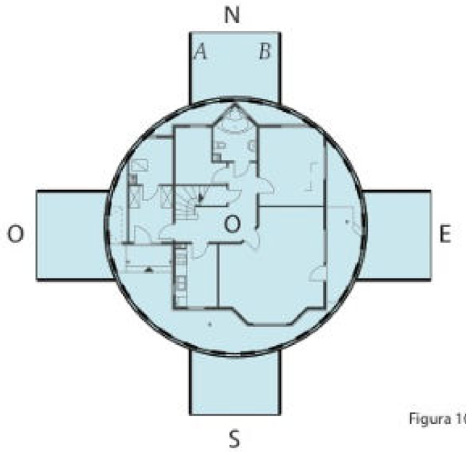


Figura 10

a) ¿Qué procedimiento siguieron para identificar los puntos en cada entrada?
b) ¿Qué tipo de movimiento se utilizó para generar las alas de acceso a partir del ala norte?
c) Unan los puntos A y B con sus respectivos puntos A' y B'.
d) Tracen las mediatrices de los segmentos AA' y BB' y prolónguenlas hasta que se intersequen. ¿Qué pueden observar?
e) ¿Cómo pueden calcular el ángulo de rotación de cada ala de acceso?
f) ¿Qué ángulo de rotación se necesita para que el ala este coincida con el ala norte? ¿Por qué?
g) ¿Consideran que se necesita el mismo ángulo de rotación para que el resto de las alas se dirijan al norte? Justifiquen su respuesta.

6. Un conjunto habitacional tiene el diseño que se muestra en la Figura 11. Asignen una letra a cada vértice e identifiquen los puntos correspondientes en los edificios. Usando diferentes colores, unan estos puntos con segmentos de recta.

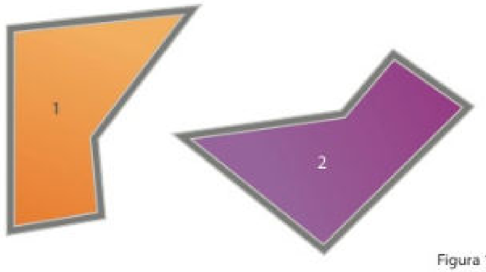


Figura 11

a) ¿Qué pueden analizar con respecto a los segmentos de recta que unen los dos edificios?
b) ¿Cómo pueden ubicar el centro de la rotación que genera al edificio 2 a partir del 1?
c) ¿Con qué ángulo de rotación se obtuvo la figura de la izquierda?
d) ¿Cómo calcularon esta medida?
e) ¿Qué propiedades de cada uno de los edificios se conservaron al llevar a cabo una rotación?

Comenten con el resto de sus compañeros los procedimientos que siguieron para identificar los ángulos de rotación de las figuras, así como las similitudes y diferencias que observan en cada una de ellas. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

AUTOEVALUACIÓN	Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
	Identifiqué las diferencias entre un movimiento de rotación y uno de traslación.		
	Analicé que en una rotación es necesario un punto fijo y un ángulo de rotación para llevar a cabo este movimiento o transformación.		
	Analicé las propiedades que se conservan en una figura que se obtiene por la rotación de otra.		

Vitaminas

En parejas realicen la siguiente actividad.

1. Analicen en la Figura 12 los diseños compuestos por diferentes transformaciones.

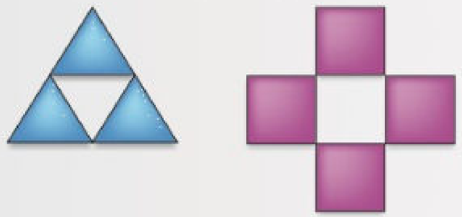


Figura 12

a) ¿Qué tipo de transformación se llevó a cabo en cada una de las figuras anteriores?
b) ¿En qué argumentos basan su respuesta?
c) ¿Es posible construir las dos figuras utilizando solamente traslaciones o solamente rotaciones? Justifiquen su respuesta.

Comparen sus respuestas con el resto de sus compañeros y discutan en grupo qué tipo de transformación es recomendable para construir este tipo de figuras compuestas.

Para concluir

Reúnete con otro compañero para resolver las siguientes situaciones.

1. Analicen cuánto deben girar las siguientes figuras sobre su centro para quedar en la misma posición y digan qué relación existe entre la medida de ese ángulo y el ángulo central de la figura.

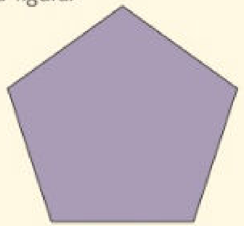


Figura 13

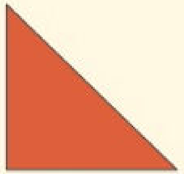


Figura 14

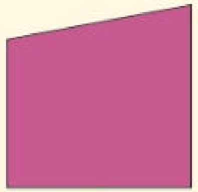


Figura 15

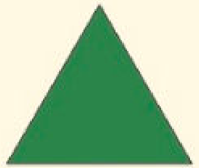


Figura 16

a) ¿Qué ángulos tuvieron que rotar en cada figura para colocarla en su posición original?
b) ¿Qué pueden concluir con respecto a sus análisis?
c) ¿Consideran que esto mismo sucede con las demás figuras geométricas?
d) Escriban una conclusión respecto a lo que sucede con estas figuras al rotarlas hasta regresar a la posición de donde partieron.

Comenten con otros compañeros sus respuestas y discutan en grupo lo que sucede con los ángulos de rotación de algunas figuras geométricas cuando se llevan a cabo transformaciones de este tipo.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre los tipos de transformaciones que han analizado hasta el momento, así como las propiedades de las figuras que se conservan en cada una de estas transformaciones.

Lección 3 | Construcción de diseños usando diferentes transformaciones

Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

Conexiones

En la lección anterior analizaste dos tipos de transformaciones, traslación y rotación. Es recomendable que revises esos contenidos y la lección 3 del bloque 5 de segundo grado.

Ventana

En parejas resuelvan las siguientes situaciones.

1. En un terreno se planea construir un conjunto habitacional en donde todas las casas tengan el mismo diseño. En los planos preliminares del conjunto habitacional se observan las dos primeras casas llamadas casas muestra (Figura 1). Tomando en cuenta que la casa en azul es la primera casa que se construyó, identifiquen los puntos A', B', C' y D' correspondientes en la casa rosa.

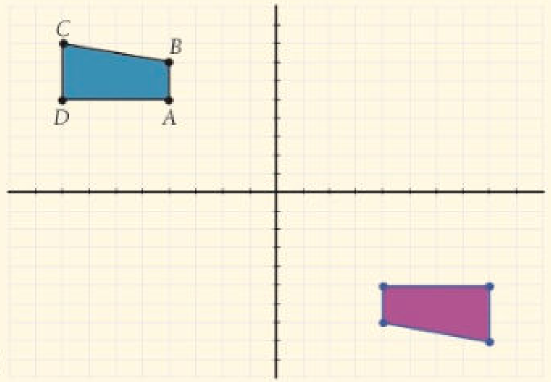


Figura 1

a) ¿Qué transformaciones se llevaron a cabo para construir la casa en color rosa?
b) ¿Consideran que se pueden combinar una o más transformaciones para reproducir la segunda casa? Justifiquen su respuesta.
c) ¿Es posible que existan diferentes procedimientos para realizar esta transformación? Comparen su respuesta con la de otras parejas.
d) ¿Qué propiedades o características conserva la segunda casa con respecto a la primera?
e) ¿Cómo es el segmento de recta AB con respecto al $A'B'$?
f) ¿Consideran que sucede lo mismo con los demás segmentos de recta que forman cada casa?

Comparen sus respuestas y procedimientos con sus demás compañeros. Analicen las diferencias y similitudes entre las transformaciones que ustedes enunciaron y las de sus compañeros. Expliquen qué características se conservan en la transformación, así como las que cambian.

En tu biblioteca

Para retomar los conocimientos acerca de la simetría revisa la página 28 del libro de José Antonio de la Peña, *Geometría y el mundo*, México, SEP/Editorial Santillana (2002).

:: | Manos a la obra

Continuen trabajando en parejas para analizar las siguientes transformaciones.

1. En un parque de diversiones se planea mover de lugar un juego de la posición A, que se puede observar en la Figura 2, hacia la posición B.

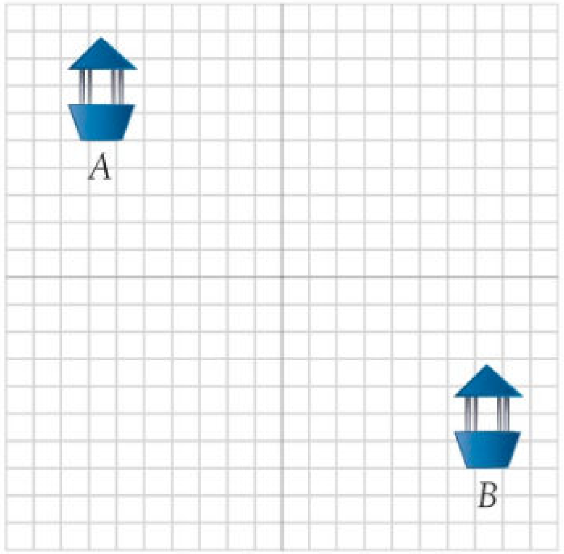


Figura 2

Si ustedes fueran los responsables de realizar este cambio de lugar, contesten:

a) ¿Qué tipo de transformación les sería más fácil utilizar?
b) Lleven a cabo sus trasformaciones con los trazos correspondientes y anoten cada una de las transformaciones que utilizaron para mover de lugar el juego.
c) ¿Consideran que hay más de una ruta a seguir para mover de lugar el juego de A hacia B? Justifiquen su respuesta.
d) ¿Qué propiedades o características del juego se conservan en cada posición?

2. En el parque de diversiones se construyeron varias tiendas de recuerdos. En la Figura 3 se muestran dos de ellas.

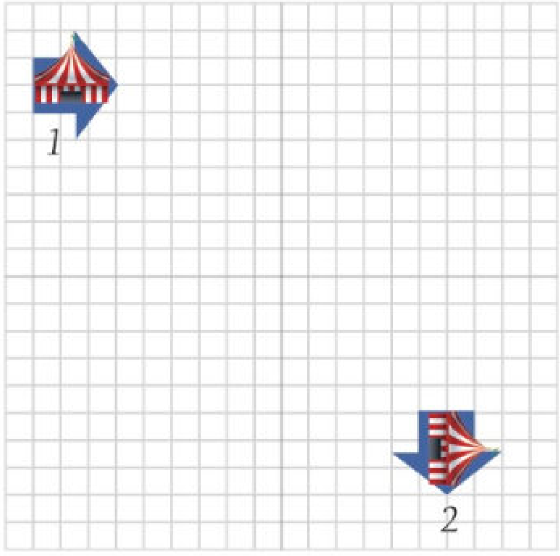


Figura 3

a) ¿Qué transformaciones se llevaron a cabo para construir la tienda 2 tomando de referencia la tienda 1?
Tracen sus transformaciones y enumeren cada una de ellas.
b) ¿Se llevaron a cabo las mismas transformaciones que en el cambio de lugar del juego? ¿Por qué?
c) ¿Consideran posible que alguna otra pareja lleve a cabo las mismas transformaciones pero no en el mismo orden que ustedes? Justifiquen su respuesta.
d) Al construir la tienda 2, ¿qué características o propiedades no se conservaron con respecto a la tienda 1?

3. Un juego en forma de triángulo originalmente se encuentra en la posición marcada por el triángulo en color azul, como se muestra en la Figura 4. El juego tiene que ser cambiado justamente a la posición que indica el triángulo de color rojo. Identifiquen los puntos A', B' y C' correspondientes a la nueva posición, es decir, en el triángulo rojo.

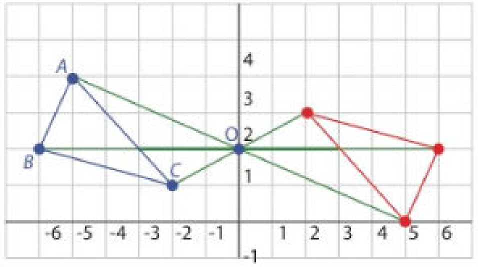


Figura 4

a) Ya que han identificado los puntos A', B', y C', en el triángulo rojo, comparen el segmento de recta OA con el segmento OA'. ¿Cómo son? ¿qué pueden decir si comparan los segmentos OB y OB'?, ¿ y al comparar OC con OC'?
b) ¿Cambian las dimensiones del juego al llegar a su nueva posición? ¿Y la orientación del juego?
c) ¿Cuál es la diferencia de esta transformación con la simetría axial?

Comparen con sus compañeros las transformaciones que hicieron para resolver cada una de las situaciones planteadas en el parque de diversiones, así como el orden que siguieron para llevar a cabo las transformaciones necesarias en cada caso.

Herramientas

Dos puntos P y P' son **simétricos respecto del centro de simetría** O, cuando O es el punto medio del segmento PP'. La simetría con respecto al punto O se llama **simetría central** y los puntos correspondientes se llaman **homólogos**. En este tipo de simetría los segmentos y ángulos correspondientes tienen la misma medida.

Reúnanse en equipos para analizar las siguientes transformaciones.

4. En una empresa especializada en diseño están trabajando sobre unos nuevos logotipos para varias empresas, y preparan algunas muestras para enseñárselas a sus clientes basándose solamente en traslaciones, simetrías y rotaciones para su construcción.

a) El primer logotipo que presentan tiene el diseño que se puede observar en la Figura 5.

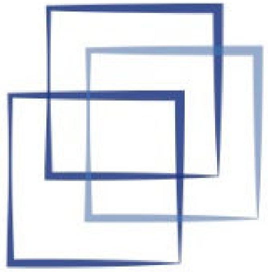


Figura 5

- ¿Qué transformaciones consideran que se llevaron a cabo para que, a partir de una figura, se creara el logotipo anterior?
- En su opinión, ¿cuál de las figuras puede ser tomada como original para llevar a cabo transformaciones y construir el logotipo? ¿Por qué?
- ¿Qué características conservan todas las figuras y cuáles no?
- Reproduzcan este logotipo en su cuaderno siguiendo las transformaciones que ustedes enunciaron.

b) El siguiente diseño que se ha construido es el que se puede ver en la Figura 6.

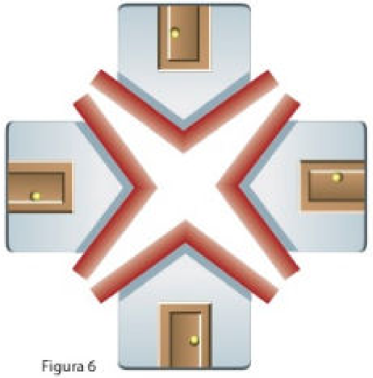


Figura 6

- ¿Consideran que es posible construir el logotipo anterior utilizando solamente simetrías? ¿Por qué?
- ¿Qué tipo de transformaciones utilizarían para construir el logotipo anterior?
- ¿Es posible utilizar todas las transformaciones que han analizado hasta el momento (simetría axial o central, traslación y rotación) para construir el logotipo de la Figura 6? Justifiquen su respuesta.
- ¿Qué características de cada figura que compone el logotipo cambian con respecto a las otras?
- ¿Habrá algún procedimiento que sea más corto que otro? ¿Cuál sería?

c) Otro logotipo que se ha construido en esta oficina es el que se muestra en la Figura 7.

Figura 7

RDT

Visita la siguiente dirección electrónica: http://www.hdt.gob.mx/new_media/telesecundaria_2/matematicas_b5/oda_3110_0/recurso/ (última consulta: 9 de noviembre de 2013).
En el recurso digital interactivo puedes trazar figuras por medio de la simetría central.

- ¿Qué características no comparten todas las figuras que forman el logotipo y cuáles sí comparten?
- Si tuvieran que reproducir este logotipo, ¿cuál sería el procedimiento que seguirían para construirlo?
- ¿Cuál consideran que es el proceso más corto para construir este logotipo? ¿Por qué?
- ¿Consideran que el cambio de color de cada figura afecta en algo las transformaciones? Justifiquen.

d) El último de los diseños que muestran a sus clientes es el que se puede apreciar en la Figura 8.

Figura 8

- ¿Cuáles son las diferencias y similitudes que existen entre las figuras que forman el logotipo?
- ¿Qué tipo de transformación debieron hacer los diseñadores para lograr este logotipo?
- ¿Consideran que existe más de un proceso de transformaciones para construir el logotipo anterior? Justifiquen su respuesta.

De manera grupal, comparen sus respuestas y discutan qué transformaciones consideran que son las más útiles o prácticas para construir los logotipos anteriores. De igual forma y con ayuda de su profesor, discutan sobre los beneficios de usar transformaciones de simetría, de rotación y de traslación para construir figuras contra otros procedimientos.

AUTOEVALUACIÓN — Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Identifiqué el tipo de transformación que se llevó a cabo en cada construcción.		
Analicé las características o propiedades que se conservan en cada una de las transformaciones que se hicieron.		
Reflexioné sobre las ventajas y desventajas de usar transformaciones de este tipo para construir imágenes.		

Vitaminas

Reúnete con un compañero para realizar las transformaciones que se proponen.

1. Analicen los siguientes logotipos y en el menor número de transformaciones posibles, describan el procedimiento para construir cada uno.

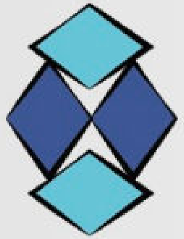


Figura 9

Figura 10

a) ¿Cuántas y cuáles transformaciones sugieren?
b) ¿Qué figura tomaron como base para realizar las transformaciones necesarias?
c) ¿Qué figura tomaron como modelo base para iniciar las transformaciones?
d) ¿Consideran que esto afecta el orden o el número de las transformaciones? ¿Por qué?
e) ¿Qué tipo de transformaciones consideran necesarias para formar los logotipos anteriores?

Comparen sus respuestas con otros compañeros, así como la secuencia de las transformaciones que cada uno utilizó. También es conveniente comparar qué figura tomaron como base para sus transformaciones.

Reúnanse en parejas para trabajar la siguiente actividad.

5. Tomando como base las formas que se muestran en la Figura 11, construyan tres mosaicos utilizando simetrías, traslaciones y rotaciones respectivamente.

Figura 11

Tomen un momento para analizar sus mosaicos y respondan.

a) ¿Qué transformaciones les produjeron mosaicos más vistosos o más agradables a la vista? ¿Por qué?
b) ¿Cuál consideran que es la utilidad de construir mosaicos utilizando transformaciones de este tipo?

Analicen los siguientes mosaicos generados con transformaciones tales como simetrías, traslaciones y rotaciones.

Figura 12

c) Expliquen en cuáles mosaicos se utilizaron simetrías, traslaciones o rotaciones.
d) ¿Cómo llegaron a estas conclusiones?
e) ¿Consideran que en un mosaico pueden existir las tres transformaciones que se han estudiado hasta el momento? Justifiquen su respuesta.

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Con ayuda de su profesor discutan sobre la posibilidad de que un mosaico pueda ser construido de la misma forma utilizando transformaciones diferentes.

Para concluir

Reúnete con otro compañero para resolver la siguiente situación.

1. Analicen el mosaico de la Figura 13 y contesten las siguientes preguntas.

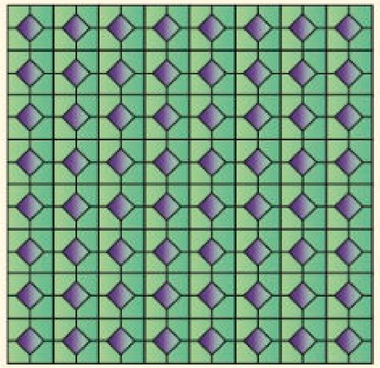


Figura 13

a) ¿Cuántas figuras diferentes pueden identificar en el mosaico?
b) ¿Todas las figuras se replican usando las mismas transformaciones?
c) ¿Cómo llegaron a esta conclusión?
d) Enuncien los pasos necesarios para la construcción del mosaico anterior.
e) ¿Es posible que los pasos que ustedes enuncien sean iguales a los de sus demás compañeros? ¿Por qué?

Comenten y comparen con las demás parejas y con el resto de sus compañeros, sus respuestas así como los procedimientos que definieron para construir el mosaico anterior.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre la construcción de figuras compuestas, logotipos y mosaicos utilizando transformaciones como la simetría, la traslación y la rotación.

Lección 4 | Áreas de cuadrados sobre los lados de un triángulo

Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Ventana

En parejas resuelvan las siguientes situaciones.

1. Bruno y Marcela están jugando con figuras geométricas de diferentes tamaños como las que se muestran en la Figura 1 y quieren comprobar si es posible o no acomodar dos cuadrados como el pequeño en el cuadrado más grande.

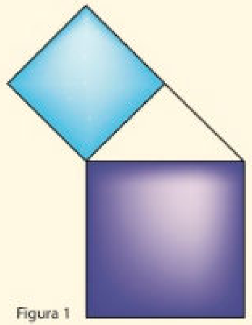


Figura 1

En su cuaderno hagan dos cuadros del mismo tamaño que el cuadrado más pequeño que se muestra en la Figura 1. Tracen las diagonales de cada uno de los cuadrados y recorten los triángulos que se forman, traten de acomodarlos de tal forma que cubran el cuadrado más grande.

a) ¿Qué tipo de triángulos se generan al trazar las diagonales de un cuadrado?
b) ¿Qué relación existe entre las medidas de los lados del triángulo y las medidas de los lados del cuadrado que tienen que cubrir?
c) ¿Qué pueden observar al acomodar los triángulos?
d) ¿A qué consideran que se deba esto?
e) ¿Consideran que cualquier tipo de triángulos puede cubrir la superficie de un cuadrado? ¿Por qué?

Comenten con el resto de sus compañeros las relaciones que pudieron identificar con respecto a las de los lados de los cuadrados más pequeños en relación con las medidas de lado del cuadrado más grande.

Conexiones

En los bloques 2 y 3 del primer grado justificaste fórmulas de perímetro y área de polígonos regulares. También aprendiste a resolver problemas que implican calcular áreas de polígonos regulares. Retomar esos conocimientos te será de utilidad para el desarrollo de esta lección.

:: Manos a la obra

Reúnanse en parejas para analizar las siguientes situaciones.

1. Marcela y Bruno continúan manipulando figuras geométricas, y ahora quieren construir un triángulo utilizando los lados de los tres cuadrados que se pueden ver en la Figura 2. Tracen estos cuadrados en su cuaderno, recórtenlos y también construyan el triángulo que los compañeros buscan.

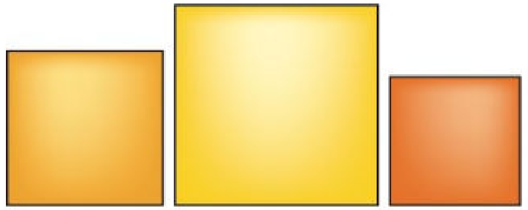


Figura 2

a) ¿Qué tipo de triángulo lograron construir?
b) ¿Es posible construir más de un triángulo diferente con estos cuadrados?
c) Calculen las áreas de los tres cuadrados, ¿existe alguna relación entre los cuadrados y sus áreas? Justifiquen su respuesta.

Tomen el cuadrado más pequeño y divídanlo en las partes que se muestran en la Figura 3 y con el cuadrado de tamaño mediano, traten de cubrir toda la superficie del área del cuadrado mayor.

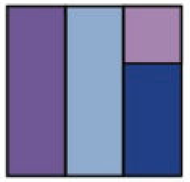


Figura 3

d) ¿Qué pueden observar?
e) ¿A qué consideran que se deba esto?
f) ¿Qué pueden concluir al respecto?

2. En un conjunto habitacional se construyeron tres edificios de departamentos de tal forma que comparten un área en común tal y como se muestra en la Figura 4.
   a) ¿Qué tipo de triángulo forma el área en común?

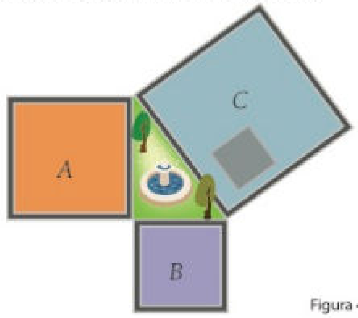


Figura 4

El edificio A mide de lado 40 m, mientras que el edificio B mide 30 m de lado; con base en sus análisis y conclusiones anteriores, contesten las siguientes preguntas.

b) ¿Habrá alguna relación entre las medidas de los edificios A y B con respecto a la medida del edificio C?
c) ¿Qué medida de lado y qué área consideran que tiene el edificio C?
d) ¿Cómo llegaron a esta conclusión?

e) ¿Qué relación existe entre un triángulo rectángulo y los cuadrados que se forman con las medidas de sus lados?
f) Si sólo pudieran conocer las áreas de dos edificios, ¿de qué manera podrían calcular el área del edificio faltante? ¿Por qué?

3. Analicen las siguientes superficies de cuadrados similares a las que representan los edificios de la actividad anterior.

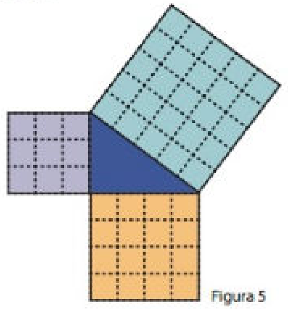


Figura 5

Si cada cuadro pequeño representa una unidad,

a) ¿Qué pueden analizar con respecto a las áreas de los cuadrados menores y la superficie del cuadrado mayor?
b) ¿Qué relación pueden observar con respecto a las superficies de los tres cuadrados que comparten los lados de este triángulo?
c) ¿Consideran que es posible conocer la superficie del cuadrado mayor si se conocen las superficies de los otros dos cuadrados? ¿Por qué?
d) Si se conocen las áreas del cuadrado mayor y otro de los cuadrados, ¿es posible calcular el área del cuadrado restante? Justifiquen su respuesta.

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y compartan las conclusiones a las que llegaron con respecto al análisis de las áreas de cuadrados que se pueden construir sobre los lados de triángulos de este tipo, así como si consideran que esto es válido para otro tipo de triángulos.

Formen equipos para resolver las siguientes consignas.

4. Analicen los cuadrados internos de las Figuras 6 y 7, con base en los análisis previos y las medidas que se muestran construyan expresiones algebraicas que modelen las áreas de los cuadrados internos de cada figura.

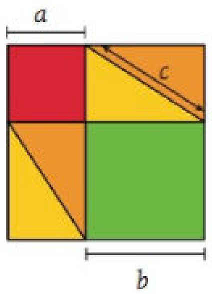


Figura 6

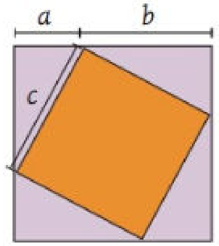


Figura 7

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que describe el total del área de los cuadrados internos de la Figura 6?
b) ¿Cuál es la expresión que modela el área del cuadrado interno de la Figura 7?
c) ¿Qué obtienen cuando se igualan estas dos expresiones algebraicas que construyeron?
d) Si cuentan con las medidas de los lados a y b, ¿es posible calcular la superficie del cuadrado interno de la Figura 7? ¿Por qué?
e) Suponiendo que las medidas son $a = 2$ y $b = 3$, ¿cuál es la superficie que ocupa el cuadrado interior de la Figura 7?
f) Si $c = 5$ y $a = 3$, ¿cuál será el área del cuadrado con medida de lado b?

Con los triángulos que se muestran en la Figura 8 y tomando en cuenta las medidas de los lados de cada uno, construyan tres cuadrados utilizando estas medidas y calculen las áreas correspondientes.

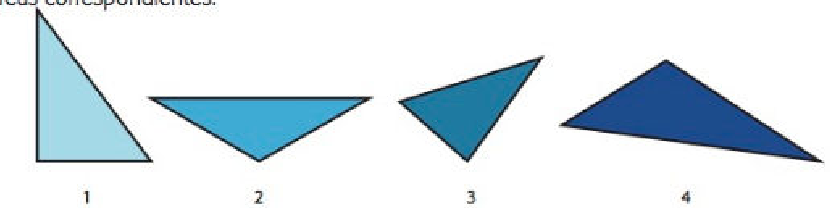


Figura 8

Con base en sus análisis, completen la Tabla 1 con los respectivos valores que se solicitan:

Número de triángulo	Áreas de los cuadrados pequeños	Área del cuadrado mayor	Suma de las áreas de los cuadrados pequeños	Tipo de triángulo
1				
2				
3				
4				

Tabla 1

a) ¿Qué pueden deducir con respecto a las sumas de las áreas de los cuadrados menores y el área del cuadrado mayor en cada uno de los triángulos?
b) ¿En qué casos se cumple la relación que dedujeron en la actividad 4?
c) ¿A qué consideran que se debe esto?
d) ¿Qué pueden concluir en relación con el tipo de triángulo y las áreas de los cuadrados que se forman en los lados menores con respecto al cuadrado que se forma en el lado mayor?

Comparen con el resto de sus compañeros sus respuestas y los procedimientos que

llevaron a cabo para resolver las actividades anteriores. Asimismo, compartan sus reflexiones acerca de lo que han analizado hasta el momento sobre las relaciones entre medidas de lados de triángulos y áreas de cuadrados. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

AUTOEVALUACIÓN — Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Construí e igualé expresiones algebraicas que modelaban la suma de las áreas de cuadrados menores con el área de un cuadrado mayor.		
Comparé las áreas de cuadrados que se forman en los lados de un triángulo para diferentes tipos de triángulos.		
Reflexioné sobre el tipo de triángulos en los cuales se cumple la relación entre áreas de los cuadrados que se construyen en sus lados.		

Vitaminas

En parejas, analicen la siguiente actividad.

1. Un parque ecológico de la comunidad Arboledas cuenta con tres áreas temáticas para los visitantes. El parque se puede observar en la Figura 9.

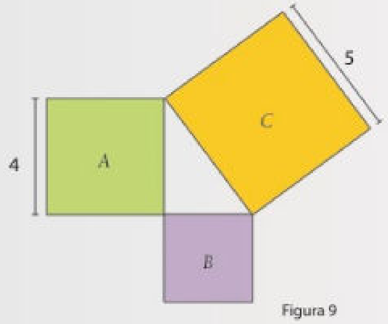


Figura 9

a) Con base en la información que se muestra en la Figura 9, ¿cuánto mide el lado del cuadrado B?
b) ¿Cómo calcularon este valor?
c) ¿Cuál es el área del cuadrado B?
d) ¿Consideran que conociendo la medida de dos de los lados del triángulo es posible calcular el área del cuadrado que se forma en el otro lado? Justifiquen su respuesta.

Comenten y comparen con el resto de sus compañeros sus respuestas, así como los procedimientos que siguieron para resolver el desafío anterior.

Para concluir

De manera individual analiza el siguiente desafío.

1. Se requieren tres cuadrados de diferentes medidas para que cada uno ajuste perfectamente con uno de los lados del triángulo que se puede ver en la Figura 10.

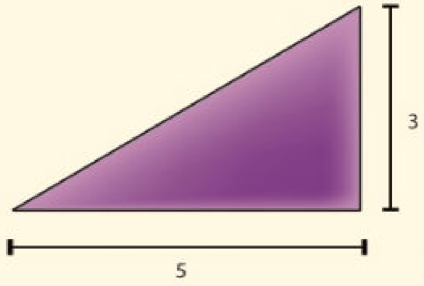


Figura 10

2. Con base en tus análisis previos contesta las siguientes preguntas:
   - a) ¿Qué medida debe tener de lado el cuadrado más grande? ______
   - b) ¿Cómo dedujiste esto? ______
   - c) ¿Cuál es el área de cada uno de los tres cuadrados que se forman a partir de los tres lados del triángulo? ______
   - d) ¿Qué puedes concluir para definir esta relación entre áreas de cuadrados y medidas de los lados de un triángulo rectángulo? ______
   - e) ¿Qué utilidad consideras que representa conocer esta relación? ______

Compara con tus compañeros tus respuestas y conclusiones. Con ayuda y guía de tu profesor, discutan si sus conclusiones son correctas y completas; mencionen ejemplos en donde puedan utilizar esta relación para resolver diversos desafíos.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre las sumas de áreas de cuadrados que se forman en los lados menores de un triángulo rectángulo y el área del cuadrado más grande que se construye en el lado mayor del mismo triángulo.

______

______

______

______

______

Lección 5 | Teorema de Pitágoras

Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.

Ventana

Reúnanse en parejas para resolver los siguientes problemas.

1. En una construcción, una plantilla de trabajadores necesita calcular la medida de una pieza triangular como la que se puede observar en la Figura 1.

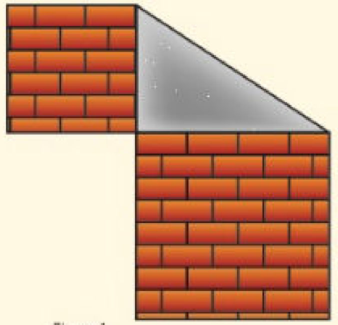


Figura 1

   - a) ¿Cuánto mide el lado más grande de la pieza triangular? ______
   - b) ¿Cuánto mide el área del cuadrado cuyo lado tiene la misma medida que el lado más grande del triángulo? ______
   - c) ¿Qué procedimientos realizaron para calcular estos valores?
   - d) ¿Consideran necesario conocer las áreas de los cuadrados para calcular la medida faltante? ¿Por qué?

Comparen sus resultados y comenten con el resto de sus compañeros sus reflexiones sobre el uso que le dieron a la relación entre triángulos rectángulos y cuadrados que han analizado con anterioridad.

Conexiones

En la lección anterior analizaste la relación entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo, es recomendable que repases dicha lección pues ahora analizarás la relación de las áreas de los cuadrados con los lados del triángulo rectángulo.

:: Manos a la obra

Herramientas

En un triángulo rectángulo sus lados reciben nombres particulares:
El lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** y es el lado mayor, aquellos lados que forman el ángulo recto se denominan **catetos** y son los lados menores del triángulo.
El **teorema de Pitágoras** relaciona los tres lados de un triángulo rectángulo estableciendo la siguiente propiedad:
"En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

En parejas analicen y resuelvan las siguientes situaciones.

1. Analicen el triángulo que se muestra en la Figura 2 y con base en las incógnitas que identifican las medidas de sus lados contesten lo que se les solicita.
   a) ¿Qué expresión algebraica describe el área del cuadrado que se forma en cada uno de los catetos del triángulo? ______________________

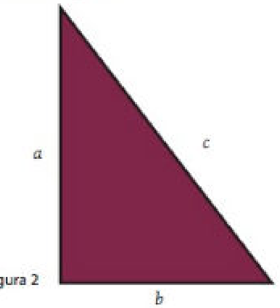


Figura 2

   b) ¿Qué expresión algebraica modela el área del cuadrado que se forma en la hipotenusa del triángulo? ______________________
   c) Con base en el teorema de Pitágoras, ¿qué relación existe entre estas tres expresiones algebraicas? ______________________

Con base en estas reflexiones, analicen el triángulo de la Figura 3 y construyan las expresiones algebraicas correspondientes en la Tabla 1.

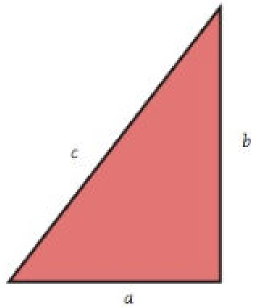


Figura 3

	Expresión algebraica
$c^2 =$	
$a^2 =$	
$b^2 =$	

Tabla 1

   d) ¿Cuál de las expresiones algebraicas anteriores describe el teorema de Pitágoras?
   e) ¿Qué procedimiento tienen que seguir para construir una expresión algebraica que sirva para calcular el valor de c en función de a y b?

Completen la Tabla 2 con las expresiones algebraicas correspondientes.

	Expresión algebraica
$c =$	
$a =$	
$b =$	

Tabla 2

   f) ¿Cuál es el significado de calcular el valor de c, a o b?

Comparen sus respuestas y expresiones algebraicas con las de sus compañeros. Argumenten los procedimientos que siguieron para construir las expresiones algebraicas que describen tanto las áreas de los cuadrados como las medidas de los lados del triángulo.

Reúnanse en equipos para trabajar en las siguientes actividades.

2. Una planta de biofertilizantes tiene el diseño que se puede observar en la Figura 4. Se planea colocar paredes de cemento en los catetos del triángulo y malla en la hipotenusa. Con los datos que se muestran en la Figura 4, respondan lo que se les pide.

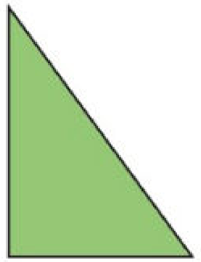


Figura 4

   a) ¿Qué expresión algebraica modela la longitud de la hipotenusa?
   b) Si uno de los catetos mide 50 m y el otro mide 35 m, ¿cuál es el valor de la hipotenusa?
   c) ¿Qué propiedad de los triángulos rectángulos siguieron para calcular este valor?
   d) Si se planea construir un área cuadrada sobre la hipotenusa para almacenar el producto terminado, ¿cuáles serían las medidas de este terreno?

3. Un productor agropecuario planea dividir con un cerco de madera un terreno irregular en dos terrenos geométricos, uno en forma triangular y el otro en forma cuadrada, para cada uno de sus hijos. El terreno tiene las medidas que se pueden observan en la Figura 5.

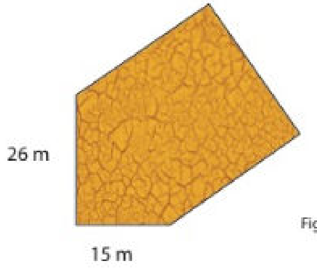


Figura 5

a) ¿Qué longitud tendrá el cerco de madera?
b) ¿Cuáles serán las áreas de cada terreno?
c) ¿Qué procedimientos siguieron para calcular los valores anteriores?
d) ¿Cuál consideran que es la utilidad de usar el teorema de Pitágoras en este tipo de problemas?

4. Ernesto quiere bajar un papalote que esta atorado en una ventana a 4 m de altura. Si tiene una escalera de 5 m que utilizará para llegar a la ventana, contesten:
a) ¿A qué distancia de la pared donde se encuentra la ventana debe colocar los pies de la escalera?
b) ¿Cómo calcularon el valor de la distancia?
c) ¿Cuántos datos y qué tipo de datos consideran que se necesitan para resolver un problema utilizando el teorema de Pitágoras? ¿Por qué?

5. Un herrero está construyendo un marco de fierro rectangular para ventanas como el que se muestra en la Figura 6. Para reforzarlo, planea soldar una varilla de forma diagonal. Analizando las medidas que se proporcionan, calculen la longitud que debe tener la varilla para reforzar el marco.

Figura 6

6. Un campesino quiere seccionar parte de la hectárea de terreno que tiene destinada para pastoreo en un terreno triangular para acondicionarlo como zona para alimento. El diseño de este espacio se muestra en la Figura 7.


Figura 7

RDT

Visita la siguiente dirección electrónica: http://www.hdt.gob.mx/GuiaSecundaria/guia/html/oda.html?id=SA3_MA_B4_OA_10069 (última consulta: 9 de noviembre de 2013).
En ella podrás utilizar el teorema de Pitágoras para calcular medidas de triángulos rectángulos.

a) Si el lado mayor del triángulo mide 25 m, ¿cuánto deben medir los catetos del triángulo?
b) ¿Qué procedimiento siguieron para calcular estos valores?
c) ¿Qué similitudes y diferencias pueden identificar con respecto a los problemas anteriores?

Comparen sus respuestas y comenten con el resto de sus compañeros los procedimientos que siguieron para resolver cada desafío, así como la manera en que utilizaron el teorema de Pitágoras. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

AUTOEVALUACIÓN

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Expresé algebraicamente las relaciones entre los cuadrados que se construyen sobre los lados de triángulos rectángulos.		
Identifiqué expresiones que permiten calcular la longitud de un lado de un triángulo rectángulo en función de los otros dos lados.		
Argumenté ampliamente los procedimientos que seguí para resolver los problemas planteados.		

Vitaminas

De manera individual resuelve los siguientes problemas.

1. A una cuadrilla de construcción se le asignó el plano del techo de un cobertizo cuyo diseño se puede ver en la Figura 8.

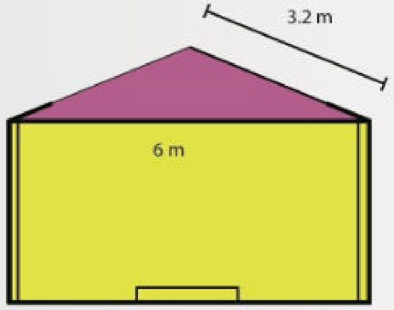


Figura 8

Con las medidas que se incluyen, contesta lo siguiente:
a) ¿Cuál es la altura del techo?
b) ¿Cómo y qué propiedad de los triángulos rectángulos utilizaste para calcular lo anterior?
c) ¿Cuál es el área de todo el techo?

2. Un chef diseñó un molde para postres individuales como el que se muestra en la Figura 9. Si desea reproducir este mismo molde al triple del tamaño original para poder hacer postres más grandes, ¿cuánto medirá el lado más largo del molde? ¿Cómo calculaste esta medida?

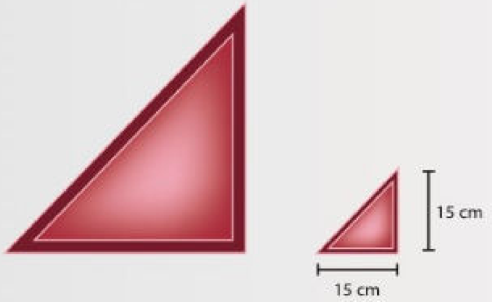


Figura 9

Compara y comenta con tus compañeros los procedimientos que seguiste para resolver los problemas anteriores, así como la utilidad de usar el teorema de Pitágoras al resolver problemas que plantean el cálculo de medidas de los triángulos rectángulos a partir de la información del mismo triángulo.

RDT

Visita la página electrónica http://www.xtec.cat/~smuria/projecte/act8ex.htm (última consulta: 4 de junio de 2013). Revisa y resuelve las actividades de triángulos rectángulos, las cuales te ayudarán a consolidar los contenidos de esta lección.
Comparte tus experiencias y resultados con tus compañeros. En caso de dudas, solicita el apoyo de tu profesor.

Reúnete con otro compañero para analizar y resolver el siguiente problema.

7. En un proceso de mantenimiento sobre un puente de cierta comunidad, se detectó que dos vigas presentaban un desgaste importante, por lo que es necesario que se reemplacen a la brevedad. Las longitudes de estas vigas están representadas por x y y en la Figura 10.

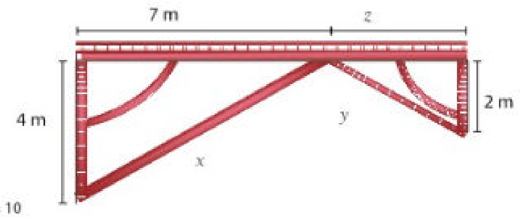


Figura 10

a) Si los triángulos que se muestran son semejantes entre sí, ¿cuál es la longitud de la viga x? ______
b) ¿Qué medidas se necesitan para poder calcular la longitud de la viga y? ______
c) ¿Cuál es el valor de y? ______
d) ¿Qué propiedades de los triángulos utilizaron para resolver este problema? ______

Comparen sus respuestas y comenten con el resto de sus compañeros los procedimientos y las propiedades de los triángulos que utilizaron para resolver el problema anterior.

Para concluir

De manera individual analiza y resuelve el siguiente desafío.

1. Una pieza de metal de una maquinaria agropecuaria tiene el diseño que se puede ver en la Figura 11, el radio del círculo interior de esta pieza es de 2 m.

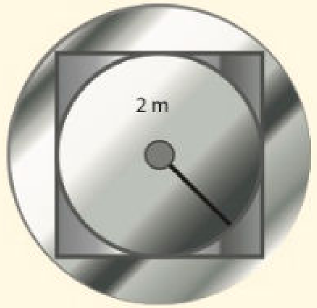


Figura 11

a) ¿Qué procedimiento puedes seguir para calcular la medida del lado del cuadrado inscrito en la pieza circular externa? ______
b) ¿Cuál es el valor del lado del cuadrado? ______
c) ¿Qué relación existe entre la diagonal del cuadrado y la pieza circular externa?
d) Si se requiere calcular el radio de la pieza circular externa, ¿de qué manera puedes calcular este valor?
e) ¿Consideras que existen otros procedimientos distintos al que tú seguiste para resolver este problema? Justifica tu respuesta.

Compara tus respuestas y procedimientos con los de tus compañeros. Explica los razonamientos en que te basaste para resolver el desafío.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre la resolución de diversos problemas utilizando una propiedad de los triángulos rectángulos conocida como el teorema de Pitágoras.

______
______
______
______
______
______
______

Lección 6 | Cálculo de probabilidades

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

Conexiones
En la lección 6 del bloque anterior analizaste las características de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes, retomar ésos contenidos te será de utilidad para desarrollar exitosamente esta lección.

Ventana

De manera individual analiza los siguientes experimentos.

1. Paola y Santiago quieren experimentar con algunos juegos de azar para predecir o calcular la probabilidad de obtener resultados específicos.
Primero, toman ocho cartas marcadas con números del 1 al 8, como se pueden ver en la Figura 1. Las colocan dentro de una bolsa oscura y proceden a sacar una carta, anotan el número que tiene y la regresan a la bolsa.

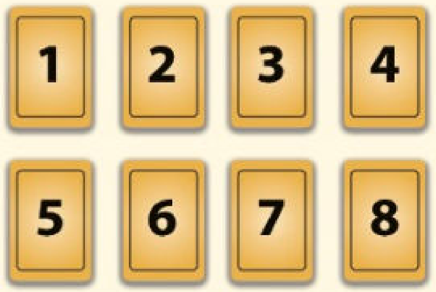


Figura 1

a) ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?
b) ¿Qué probabilidad consideras que tiene de salir cualquier carta?
c) ¿Qué probabilidad existe de sacar una carta marcada con un número mayor que siete?
d) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta marcada con un número primo?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que saquen un número impar?
f) ¿Consideras que la probabilidad de sacar un número par es menor, igual o mayor que la probabilidad anterior? Justifica tu respuesta.
g) ¿Cuáles de los eventos anteriores consideras que es un evento simple?
h) ¿Cuáles consideras que son eventos complementarios?

Compara tus respuestas con el resto de tus compañeros y con ayuda y guía de tu profesor comparte tus reflexiones acerca de lo que se considera un evento simple y a cuáles se les considera eventos complementarios.

Glosario
evento simple. Es un evento con un solo resultado.
eventos complementarios. Ocurren cuando su unión es igual al espacio muestral, es decir, si no ocurre uno, ocurre el otro.

Herramientas
La suma de las probabilidades de dos eventos complementarios es 1. La probabilidad de un evento complementario se define como: $P(A^c) = 1 - P(A)$.

:: | Manos a la obra

Ahora, trabajen en parejas para analizar y calcular las probabilidades de los siguientes experimentos aleatorios.

1. Analicen el juego de azar con el cual trabajaron en la actividad inicial, calculen las probabilidades que se piden y con ellas completen la Tabla 1.

1	2	3	4	5	6
P(múltiplos de 2)	P(múltiplos de 3)	P(5)	P(menor a 5)	P(par)	P(impar)

Tabla 1

a) ¿Cuál de los eventos anteriores es un evento simple y cuál complementario?
b) ¿De qué manera se calcula la probabilidad de un evento simple?
c) Comprueben que los eventos 5 y 6 son complementarios.
d) ¿Qué procedimiento siguieron para comprobar lo anterior?
e) ¿Qué evento de los anteriores consideran que puede ser el evento complementario de obtener una carta con un número primo?

2. Ahora, Paola y Santiago toman una ruleta y se preguntan si es posible saber qué resultado pueden obtener al hacer que gire. La ruleta tiene el diseño que se puede ver en la Figura 2.

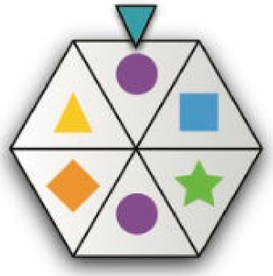


Figura 2

a) ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga en cualquier figura?

Completen la Tabla 2 con las probabilidades correspondientes.

Figura	Círculo	Cuadrado	Estrella	Rombo	Triángulo
Probabilidad					

Tabla 2

c) ¿Qué probabilidad hay de que la ruleta se detenga en una casilla con círculo?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que no se detenga en una casilla con círculo?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga en un cuadrado o en un rombo?
f) ¿Cuál es la probabilidad de que la ruleta se detenga en una estrella o un rombo o un triángulo?
g) ¿Cuáles de los anteriores consideran que se pueden identificar como eventos simples y cuáles como eventos compuestos?

Comparen con sus compañeros sus resultados y enuncien sus conclusiones acerca de los eventos simples, compuestos y complementarios, así como el procedimiento para calcular sus probabilidades.

Glosario
eventos compuestos. Son aquellos que se forman combinando varios eventos simples y se pueden identificar por el conectivo "o"

Ahora reúnanse en equipos para calcular las probabilidades de los eventos aleatorios que se describen a continuación.

3. Analicen nuevamente el experimento aleatorio de sacar cartas marcadas con números del 1 al 8 y calculen las probabilidades de los siguientes eventos.
   A: sacar un número menor a 3.
   B: sacar un número múltiplo de 3.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que suceda el evento A?
      $P(A) =$
   b) ¿Cuál es la probabilidad del evento B?
      $P(B) =$
   c) ¿Cuál es el significado de que ocurra el evento A o que ocurra el evento B?
   d) ¿Cómo se conoce a este tipo de eventos?
   e) ¿Cuál es la probabilidad de que suceda el evento A o el evento B?
      $P(A \text{ o } B) =$
   f) Describan el procedimiento que siguieron para calcular la probabilidad anterior.

4. Vuelvan a trabajar con las cartas marcadas y analicen los eventos aleatorios que se enuncian a continuación.
   C: sacar un número mayor a 3.
   D: sacar un número múltiplo de 3.

Completen la Tabla 3.

Evento	Probabilidad
P (C)	
P (D)	
P (C o D)	

Tabla 3

   a) ¿Cuál consideran que es el significado de que ocurra el evento C o el evento D?
   b) ¿Cómo son conocidos este tipo de eventos?
   c) Describan el procedimiento que siguieron para calcular la probabilidad P (C o D).
   d) ¿Qué semejanzas o similitudes pueden identificar entre los eventos A y B, y los eventos C y D?

5. Para el día del niño, en la Secundaria Nayarit se organizaron y llevaron libros para rifar entre los alumnos del tercero de secundaria. A cada alumno se le asignaron cinco números entre el 1 y el 100. Juan y Manuel tienen los siguientes números para participar en dicha rifa, han juntado sus números para tener más posibilidades de ganar.

2 5 15 22 31 33 40 62 78 87

Figura 3

Con base en el análisis que han hecho hasta el momento, propongan dos eventos que sean mutuamente excluyentes y dos eventos que sean no excluyentes.

a) De los cuatro eventos que construyeron, ¿qué par de eventos consideran que se puede definir como mutuamente excluyentes?
b) ¿Qué características deben cumplir este tipo de eventos?
c) ¿Qué características deben cumplir los eventos no excluyentes?
d) ¿Podrían decir cómo se calculan las probabilidades de ocurrencia de los eventos mutuamente excluyentes y de los no excluyentes?
e) ¿Qué regla pueden enunciar con respecto al cálculo de probabilidades de este tipo de eventos?

Comparen sus respuestas con otros equipos. Discutan de manera grupal las características de ocurrencia de los eventos mutuamente excluyentes y de los eventos no excluyentes, así como de los procedimientos para calcular la probabilidad de eventos compuestos.

Herramientas

Cuando dos eventos son **mutuamente excluyentes** su probabilidad de ocurrencia se puede calcular como: $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$, mientras que la probabilidad de dos eventos **no excluyentes** se calcula como: $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$.

AUTOEVALUACIÓN — Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Identifiqué las características de los eventos mutuamente excluyentes.		
Identifiqué las características de los eventos no excluyentes.		
Consolidé los procedimientos para calcular la probabilidad de ocurrencia de eventos mutuamente excluyentes y eventos no excluyentes.		

Vitaminas

De manera individual analiza el siguiente experimento aleatorio y calcula las probabilidades que se piden.

1. Toma un dado cúbico de seis caras y analiza los resultados posibles de obtener al lanzarlo. Con base en los eventos que se muestran a continuación, calcula las probabilidades de ocurrencia correspondientes.
   A: tirar un número mayor a 3.
   B: tirar un múltiplo del 3.
   C: tirar un número menor o igual a 3.

   a) ¿Cuáles de los eventos anteriores son mutuamente excluyentes y cuáles son no excluyentes?
      - $P(A \text{ o } B) =$
      - $P(A \text{ o } C) =$
      - $P(B \text{ o } C) =$
   b) ¿Qué par de eventos ocupan todo el espacio muestral del lanzamiento de un dado y qué tipo de eventos son estos?

2. En una bolsa se meten diez bolas numeradas del 1 al 10 y se procede a sacar una bola cada turno, el número de la bola se anota y posteriormente se regresa a la bolsa. Analiza el espacio muestral de este experimento aleatorio y los eventos que se muestran a continuación.

A: sacar un número par.
B: sacar un número primo.
C: sacar un número impar.
D: sacar el número 10.

a) Enuncia qué eventos pueden ser mutuamente excluyentes, no excluyentes y un evento simple de los anteriores.
b) Calcula las probabilidades de ocurrencia de los eventos que definiste con anterioridad.
c) ¿Qué procedimiento seguiste para calcular cada una de las probabilidades de ocurrencia anteriores?

Compara tus respuestas con el resto de tus compañeros y comenten los procedimientos que siguieron para calcular las probabilidades de los eventos compuestos y simples que se solicitaron en cada una de las actividades anteriores.

Reúnete con un compañero para realizar la siguiente actividad.

6. Para consolidar su experiencia con el cálculo de las probabilidades de eventos, diseñen un experimento aleatorio en el cual se puedan enunciar eventos simples, compuestos y complementarios. Una vez concluido su experimento, preséntenlo a otra pareja para su resolución y observen los procedimientos que siguen para calcular las probabilidades que se les pide. De igual forma, participen activamente en la resolución del experimento aleatorio que les presenten sus compañeros.

Para concluir

Continúen trabajando en parejas para llevar a cabo la siguiente actividad.

1. Para el siguiente experimento aleatorio se necesitan dos dados cúbicos con seis caras marcadas del 1 al 6 respectivamente, de ser posible utilicen dados distintos o de diferentes colores para su fácil identificación. Se deben lanzar los dos dados al mismo tiempo y completar la Tabla 4, así como calcular las probabilidades que se solicitan.

		DADO 1					
		1	2	3	4	5	6
DADO 2	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

Tabla 4

a) ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento aleatorio?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra cada resultado?
c) ¿Qué procedimiento siguieron para calcular la probabilidad anterior?

Completen la Tabla 5 con los datos que se piden.

Evento	A	B	C	D	E	F
La suma es	2	3	4	5	6	7
Resultados posibles						
Probabilidad						
Evento	G	H	I	J	K	
La suma es	8	9	10	11	12	
Resultados posibles						
Probabilidad						

Tabla 5

d) ¿Cuál de los eventos anteriores tiene la mayor probabilidad de ocurrir y cuál o cuáles tienen la menor probabilidad de ocurrir?

Analicen los posibles resultados con los que completaron la Tabla 5 y definan un evento simple, dos eventos complementarios, dos eventos mutuamente excluyentes y dos eventos no excluyentes.

e) ¿Qué procedimientos deben seguir en cada caso para calcular la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los eventos anteriores?

Comparen sus resultados con el resto de sus compañeros, así como los eventos que definieron para la actividad anterior. Comenten con el resto del grupo los procedimientos que llevaron a cabo para calcular las probabilidades en cada caso.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre la identificación de diferentes tipos de eventos en experimentos aleatorios, así como el cálculo de probabilidades de ocurrencia de eventos simples, complementarios, compuestos, excluyentes y no excluyentes.

RDT

Visita la siguiente dirección electrónica:
http://www.hdt.gob.mx/GuiaSecundaria/guia/html/oda.html?id=SA2_MA_B5_OA_10121 (última consulta: 9 de noviembre de 2013).
Para resolver problemas de probabilidad de eventos mutuamente excluyentes aplicando la regla de la suma.

Primera parte

Responde las preguntas y describe las operaciones necesarias para resolver los siguientes problemas:

El parque

1. En un parque de diversiones la rampa de deslizamiento en costales tiene las medidas que se indican en la Figura 1. Para llegar a la parte superior se deben subir seis escaleras, cada una de una longitud igual a una quinta parte de la altura de la rampa.

   a) ¿Cuál es la altura de la rampa?
   b) ¿Cuál es la longitud total de las seis escaleras?

   Para disminuir la pendiente de la rampa se ha establecido la altura de la misma en 2.5 m, sin modificar la longitud de la base.

   c) Indica cuál es ahora la longitud de la rampa.
   I. 6.5 m II. 8.3 m III. 7.6 m IV. 7.5 m

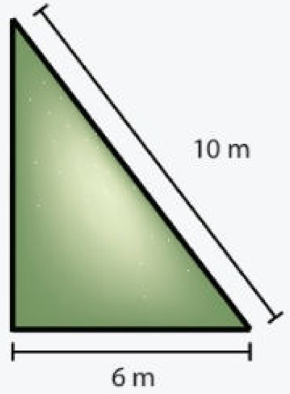


Figura 1

2. En la casa de los espejos de dicho parque, se observaron las siguientes transformaciones con un triángulo.

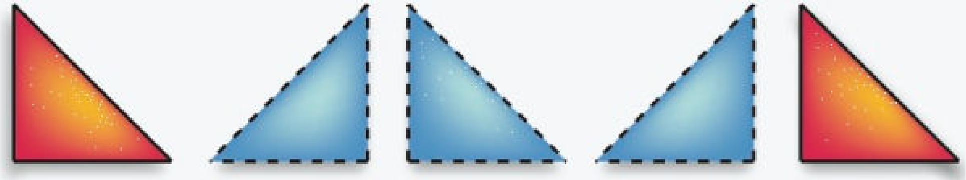


Figura 2

   a) ¿Qué tipo de trasformaciones se llevaron a cabo para regresar el triángulo a la posición original?
   b) ¿Consideras que puede haber más de una secuencia de transformaciones para regresar a la posición original en el mismo número de pasos? Justifica tu respuesta.

3. En la secuencia de transformaciones de la Figura 3, se han llevado a cabo tres transformaciones para llegar al triángulo rojo.
   a) ¿Qué tipo de transformación se utilizó?

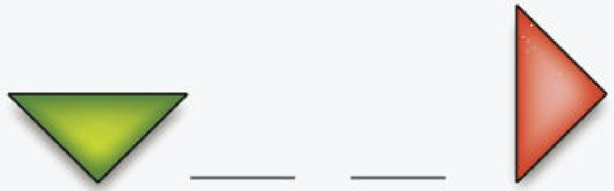


Figura 3

Segunda parte

De las respuestas que se proponen, escoge la opción correcta y márcala con una ✓:

1. La puerta rectangular de un fraccionamiento tiene el diseño que se muestra en la Figura 5. La puerta tiene un área de 16 m y está compuesta de tres partes, metal, madera y metal ¿cuánto miden de largo cada una de las partes de metal?
   a) $x = 4$ m b) $x = 2$ m
   c) $x = 16$ m d) $x = 8$ m

Figura 5

2. En la comunidad los girasoles se planea construir un centro eco-turístico para crear fuentes de empleo y al mismo tiempo cuidar el medio ambiente. La zona de alojamiento tiene forma rectangular y un área de 1176 m² y sus medidas están descritas como: largo $= 3x + 80$; ancho $= 2x$. ¿Cuánto mide el largo de la zona de alojamiento?
   a) 12 m b) 6 m
   c) 98 m d) 83 m

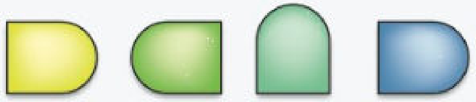


Figura 6

3. Analiza las transformaciones que se llevaron a cabo en la Figura 6 y escoge de las opciones que se presentan la secuencia correcta.
   a) simetría – rotación – rotación b) reflexión – simetría – rotación
   c) traslación – rotación – simetría d) rotación – rotación – traslación

4. En un fraccionamiento se venderá el terreno cuadrado que se observa en la Figura 7. Para saber el precio del terreno es necesario conocer la superficie, ¿cuál es aproximadamente el área de este terreno?
   a) $A = 3.6$ m² b) $A = 5$ m²
   c) $A = 169$ m² d) $A = 13$ m²

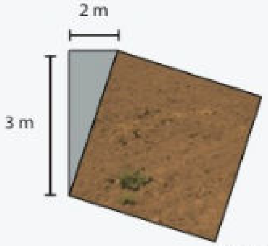
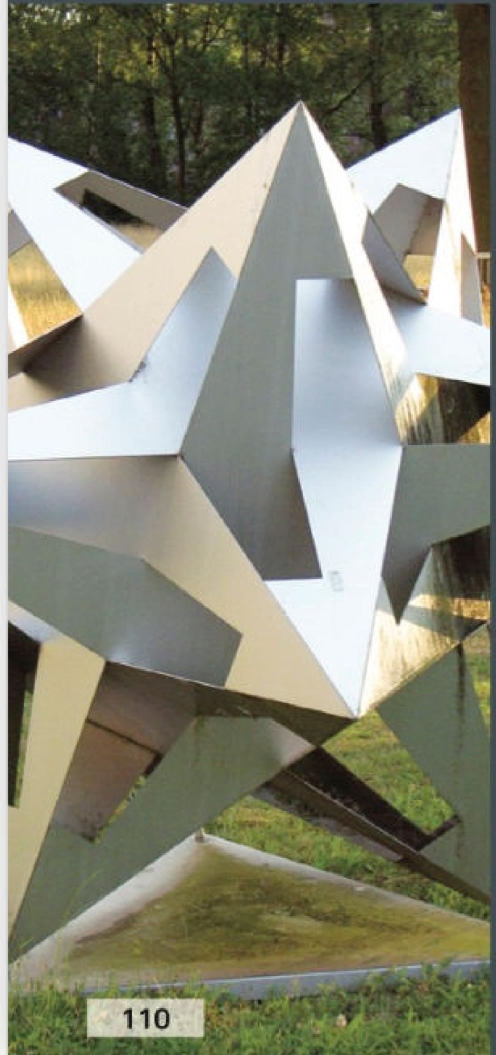


Figura 7

5. En un experimento aleatorio, se colocan fichas marcadas con letras del abecedario en una bolsa, y se proponen los siguientes eventos:
   A: Sacar una vocal B: Sacar una consonante
   ¿Cómo se calcula la probabilidad de ocurrencia de A o B?
   a) $P(B) = 1 - P(A)$ b) $P(A) = 1 - P(B)$
   c) $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$ d) $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$

EVALUACIÓN — Solicita a tu profesor que evalúe tus aprendizajes esperados, proporcionándote indicaciones y sugerencias para mejorar.	Incipiente	En desarrollo	Logrado
Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas y su factorización.			
Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.			
Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.			
Sugerencias:			

BLOQUE 3



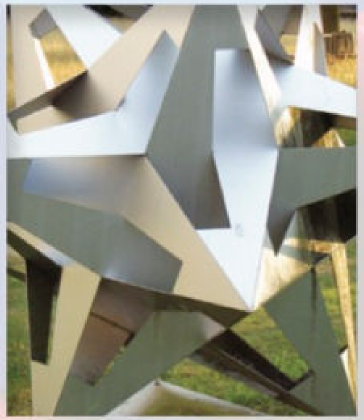
Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

	CONTENIDOS		DOSIFICACIÓN BIMESTRAL
LECCIÓN 1	Resolución de ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	
LECCIÓN 2	Problemas de congruencia y semejanza	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	
LECCIÓN 3	Teorema de Tales	Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	
LECCIÓN 4	Figuras homotéticas	Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	
LECCIÓN 5	Gráficas de funciones cuadráticas	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	
LECCIÓN 6	Lectura y construcción de gráficas	Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	
LECCIÓN 7	Probabilidad de eventos independientes	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	



Lección 1 | Resolución de ecuaciones

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

Conexiones

En los bloques 1 y 2 resolviste problemas que implicaban el uso de ecuaciones cuadráticas, utilizando procedimientos personales, operaciones inversas y usando factorización. Retoma esos conocimientos ya que te serán de mucha utilidad en la resolución de algunos planteamientos de esta lección.

Ventana

Reúnanse en parejas para resolver el siguiente desafío.

1. El papá de Mateo es carpintero y está construyendo como regalo de cumpleaños un portarretrato con forma cuadrangular, la fotografía va colocada en el cuadro de en medio, como muestra la Figura 1.

Figura 1

a) ¿Qué expresión algebraica describe el área del marco sin fotografía?
b) ¿Qué expresión algebraica representa el área que ocupa en el marco la fotografía al ser colocada? ____________
c) ¿Cuáles son las dimensiones del marco? ____________
d) ¿Cómo obtuviste las dimensiones del marco?

Comparen sus resultados con los de sus compañeros y comenten sus reflexiones sobre el uso y construcción de ecuaciones para resolver distintas situaciones.

:: | Manos a la obra

Reúnanse en parejas y analicen las siguientes situaciones.

1. Otra de las figuras decorativas que se trabajan en la carpintería del papá de Mateo es un pisapapeles, cuyo diseño es el que se observa en la Figura 2, de la siguiente página.

a) Describan las figuras geométricas que forman la base y las caras del pisapapeles.
b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la base de la pirámide?
____
c) Representen algebraicamente cómo calcular el volumen de este cuerpo geométrico. ____________

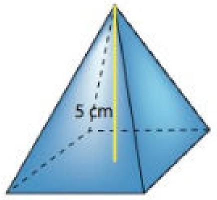


Figura 2

d) Si el volumen de la Figura 2 es 240 cm³, ¿cuáles son las dimensiones del pisapapeles? ____________
e) ¿Cómo calcularon estas dimensiones?

2. Hay pisapapeles de diferentes tamaños, conservando la misma forma.

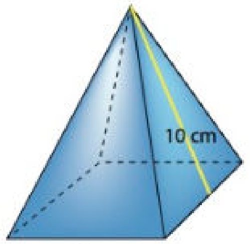


Figura 3

Para forrar cinco pisapapeles como el de la Figura 3 se utilizaron 2 880 cm² de papel adhesivo decorado.

a) ¿Qué expresión algebraica representa la situación descrita? ____________
b) ¿Qué tipo de ecuación obtuvieron? ____________
c) Realicen las operaciones necesarias para igualar con cero la ecuación anterior.
d) ¿Cuántos términos hay en el lado de la ecuación distintos de cero?

3. Analicen la información de la sección Herramientas e identifiquen los términos de la ecuación que obtuvieron en la actividad 2.

Herramientas

Una expresión de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, es llamada **forma general de la ecuación de segundo grado** o cuadrática, ya que el mayor exponente de la incógnita es 2.
Donde a, b y c son los coeficientes de la ecuación y $a \neq 0$.
Los términos que forman la ecuación se identifican de la siguiente manera:

ax^2	bx	c
Término cuadrático	Término lineal	Término independiente

a) ¿Cuáles son los valores de los coeficientes de la ecuación que obtuvieron? Escríbanlos.
$a =$ $b =$ $c =$

Hasta ahora han empleado operaciones inversas y factorización para resolver ecuaciones de segundo grado. Existe otro método conocido como fórmula general.

Herramientas

Una ecuación de segundo grado puede resolverse por medio de la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde a, b y c son los coeficientes de la ecuación correspondiente.
Esta fórmula es conocida como **fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado.**

b) ¿Qué operaciones aritméticas identifican en la fórmula general? ________
c) ¿Qué indica el símbolo ± en la fórmula? ________
d) Utilicen la fórmula general para resolver la ecuación que han estado trabajando.
e) ¿Cuántas soluciones obtuvieron? ________
f) ¿Cuáles son las dimensiones del pisapapeles de la Figura 3? ________

g) Resuelvan nuevamente su ecuación empleando alguno de los métodos trabajados con anterioridad y comparen las soluciones obtenidas. ¿Cómo son entre sí? Expliquen.

Comparen sus respuestas con otras parejas. De manera grupal discutan las características de la fórmula general, las operaciones que intervienen en ella y cómo se obtienen las raíces o soluciones de la ecuación. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

En equipos resuelvan las siguientes actividades.

4. Una flecha se lanza verticalmente hacia arriba, la trayectoria que describe tiene por ecuación $h = -10t^2 + 20t + 12$, donde h es la altura medida en metros, y t el tiempo en segundos.
Se desea calcular el tiempo que tarda la flecha en caer al suelo.
a) ¿Cuál es el valor de h que describe la situación del problema? Justifiquen.
b) ¿Cuáles son los valores de a, b, c en la ecuación? ________
c) ¿En cuánto tiempo la flecha llegó al suelo? ________
d) Al resolver la ecuación por medio de la fórmula general, ¿cuántas soluciones obtienen?
e) ¿Cómo son entre sí?

f) Consideren la ecuación que representa el problema anterior y calculen el valor numérico de la expresión $b^2 - 4ac$ que de ahora en adelante llamaremos **discriminante de la ecuación.** ¿Cuál es este valor?

Compartan sus respuestas con sus compañeros y continúen el análisis de ecuaciones con la siguiente actividad.

5. Analicen las siguientes ecuaciones:
I. $(3x - 7)(2x + 3) = 0$
II. $(2x - 1)^2 = 0$
III. $2x^2 - 4x + 6 = 0$

a) Escriban las ecuaciones anteriores en su forma general y completen las columnas faltantes de la Tabla 1.

Ecuación	a	b	c	$D = b^2 - 4ac$	Soluciones: x_1 y x_2
I					
II					
III					

Tabla 1

b) Si el valor del discriminante es mayor que cero, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación? ________
c) Si el valor del discriminante es igual a cero, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación? ________
d) Si el valor del discriminante es menor que cero, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación? ________
e) ¿Hay alguna ecuación que no pueda resolverse? ¿Por qué? ¿Cómo son sus soluciones? ________
f) ¿Cómo calculan la raíz cuadrada de un número negativo? ________
g) Escriban sus conclusiones acerca del tipo de soluciones de una ecuación cuadrática cuando su discriminante es un número negativo, positivo o cero. ________

Con ayuda de su profesor completen la Tabla 2 con sus conclusiones.

Discriminante	Tipo de solución
$b^2 - 4ac > 0$	
$b^2 - 4ac = 0$	
$b^2 - 4ac < 0$	

Tabla 2

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Discutan de manera grupal la utilidad de conocer el valor del discriminante en la resolución de ecuaciones de segundo grado. Asimismo, con ayuda de su profesor, reflexionen acerca de los números que resultan al calcular la raíz cuadrada de un número negativo.

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Calculé correctamente las soluciones de una ecuación cuadrática utilizando la fórmula general.		
Examiné el tipo de soluciones obtenidas en las actividades.		
Analicé la relación entre el valor del discriminante y el tipo de soluciones en una ecuación de segundo grado.		
Participé de manera respetuosa en la discusión acerca de la utilidad de conocer el valor del discriminante.		

AUTOEVALUACIÓN

Reunidos en parejas trabajen las siguientes actividades.

6. El papá de Mateo compró un terreno rectangular donde desea mudar su carpintería, el plano se muestra a continuación.

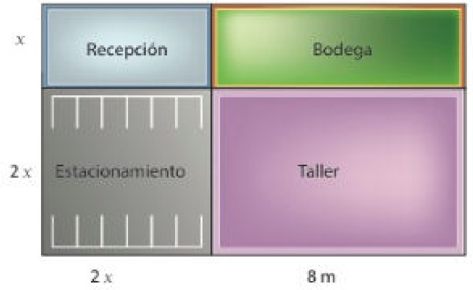


Figura 4

a) Escriban la expresión algebraica que describe el área de cada uno de los espacios en que se divide el terreno. ____________________

b) Si la superficie total del terreno es 145.25 m², ¿cuáles son las dimensiones del terreno? ____________________

c) ¿Qué valores tienen las áreas de cada espacio del terreno?

Recepción: ____________ Bodega: ____________

Estacionamiento: ____________ Taller: ____________

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

7. Analicen la ecuación $4x^2 - kx + 36 = 0$.

Escriban en la Tabla 3 valores para k que cumplan lo que se indica.

	Valor de k
Obtener dos soluciones diferentes	
Obtener dos soluciones iguales	
Obtener números imaginarios	

Tabla 3

RDT

Visita la siguiente dirección electrónica: http://www.hdt.gob.mx/GuiaSecundaria/guia/odas/SA3_MA_B3_OA_10049/index.html (última consulta: 10 de noviembre de 2013). Con el recurso digital interactivo que se presenta, podrás reafirmar tus conocimientos y uso de la fórmula general. Comparte tus experiencias con tus compañeros.

Comparen sus resultados con los de sus compañeros y comenten los procedimientos que llevaron a cabo para resolver cada una de las situaciones anteriores.

Compartan con sus compañeros sus conclusiones acerca de cómo se modifica el tipo de soluciones, dependiendo de los valores de a, b y c.

Vitaminas

Resuelve las siguientes actividades.

1. Analiza y resuelve la siguiente situación. "En un rectángulo su largo mide $x+1$ y su ancho el doble que su largo".
   a) ¿Cuál es la expresión algebraica que describe el área del rectángulo?
   b) Si el área es de 4 m², ¿cuál es la ecuación con la que se pueden obtener las dimensiones de la figura?
   c) ¿Cuál es el valor del discriminante $b^2 - 4ac$?
   d) ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

2. A un cuadrado se le hacen las siguientes modificaciones: uno de los lados se disminuye en 7 cm y a la longitud del otro lado se aumenta en 14 cm y posteriormente se duplica.
   a) ¿Cuál es el modelo matemático que describe las nuevas dimensiones de la figura?
   b) Si la superficie de la nueva figura es 392 cm², ¿cuáles eran las dimensiones del cuadrado original?

3. Anticipen el tipo de soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones:
   a) $9x^2 = -12x - 4$
   b) $3x^2 - 10x + 50 = 0$
   c) $x^2 - 6x = 16$

Compara con tus compañeros tus resultados. Si surgen dudas, consulten a su profesor.

RDT

Para profundizar en este tema revisa la siguiente página: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/ecuacion.htm (última consulta: 2 de mayo de 2013). Analiza las ecuaciones y problemas propuestos. Comparte con tus compañeros tus resultados y corrijan en caso de ser necesario.

Para concluir

Resuelve con un compañero los siguientes problemas.

1. El papá de Mateo quiere incursionar en ideas nuevas en portarretratos, para ello ha diseñado un nuevo modelo como se muestra a continuación:

Figura 5

a) Si las longitudes de los lados son tres números pares consecutivos y se trata de un triángulo rectángulo, ¿cuál es la expresión algebraica útil para calcular las dimensiones de la figura?
b) Calculen las dimensiones de los lados del portarretrato utilizando la fórmula general.

2. Si se tiene otro diseño como el siguiente:

Figura 6

a) ¿Cuál debe ser el valor de x para que el área donde debe colocarse la fotografía sea 125 cm^2?

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Analicen los resultados obtenidos y en caso de dudas consulten a su profesor.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones acerca de la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado y las ventajas de su uso en la resolución de problemas.

Lección 2 | Problemas de congruencia y semejanza

Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

Ventana

Reúnanse en parejas y analicen las siguientes situaciones.

1. El papá de Mateo ahora está construyendo dos rectángulos a escala para diseñar un juego de escuadras como se muestra en la Figura 1.

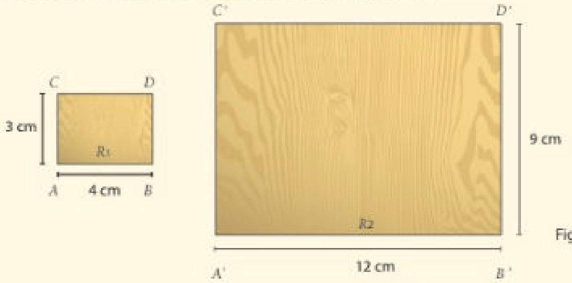


Figura 1

a) ¿Son semejantes estos rectángulos? Justifiquen su respuesta.
b) Tracen la diagonal CB en el primer rectángulo y la diagonal $A'D'$ en el segundo.
c) Calculen el valor numérico de la longitud de cada diagonal.
d) Analicen los triángulos que se forman en cada figura, ¿cómo son entre sí los respectivos ángulos interiores de cada triángulo?
e) ¿Pueden afirmar que los triángulos son semejantes? ¿En qué criterios de semejanza basan su respuesta?
f) ¿Son congruentes los triángulos? Para sustentar su respuesta, si es afirmativa, ¿qué criterios de congruencia pueden emplear?

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Argumenten los criterios de congruencia y semejanza empleados. En caso de dudas, soliciten el apoyo de su profesor.

Conexiones

Revisa en las lecciones 2 y 3 del bloque 1 acerca de la construcción y explicitación de criterios de triángulos congruentes y semejantes. Ello te será de utilidad en las actividades de esta lección.

:: Manos a la obra

Reúnanse en parejas y analicen las siguientes situaciones.

1. En la carpintería del papá de Mateo están pintando los pisapapeles en forma de pirámide, en la Figura 2 se muestra una de las caras, cuya forma es un triángulo isósceles.

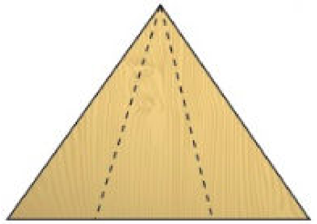


Figura 2

RDT

Visita la siguiente dirección electrónica: http://www.hdt.gob.mx/GuiaSecundaria/guia/odas/SA3_MA_B1_OA_10009/index.html (última consulta: 11 de noviembre de 2013). Aplica los criterios de congruencia de triángulos en el recurso digital interactivo para justificar las propiedades de cuadriláteros. Compara tus respuestas con tus compañeros.

Se quiere pintar una de las caras en tres secciones de diferentes colores, que tengan la misma área. Para ello, se afirma que basta dividir la longitud de la base en tres segmentos iguales y trazar una línea hasta el vértice; además se asegura que el triángulo que se obtiene justo en medio también es isósceles.

a) Comenzando de izquierda a derecha, identifiquen como triángulos 1, 2 y 3 a los que se han formado en el interior de la Figura 2.
b) ¿Qué características tienen en común los triángulos 1 y 3?
c) Sin realizar medición alguna, ¿de qué forma podrían confirmar si el triángulo 2 es isósceles?
d) Expliquen porqué se afirma que los tres triángulos tienen la misma área.
e) Si la longitud de la base es 6 cm y los lados iguales miden 8.5 cm, ¿cuál es el área de cada sección triangular?
f) Analicen las siguientes afirmaciones y concluyan si son verdaderas o falsas.
- Si dos figuras son congruentes, tienen la misma área. ___
- Si dos figuras tienen la misma área, son congruentes. ___

2. Mateo hizo su propio diseño, como el que se muestra en la Figura 3, para decorar uno de los pisapapeles, cuyas caras son triángulos equiláteros. Mateo presentó su diseño a sus compañeros planteándoles el siguiente problema:
"Sin realizar medición alguna, justifiquen que el triángulo *DEF* es equilátero si saben que los segmentos *AF*, *BD* y *CE* tienen la misma longitud".

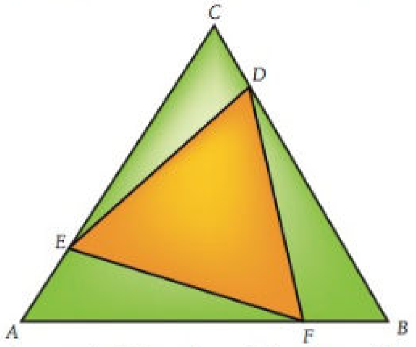


Figura 3

a) ¿Cuáles son las características de un triángulo equilátero?
b) ¿Cómo son entre sí los triángulos verdes?
c) ¿Qué deben analizar para concluir que el triángulo interior es equilátero?
d) Si los lados del triángulo equilátero original miden 10 cm y los lados del triángulo equilátero interior miden 7.2 cm, ¿cuál es el área de cada triángulo de color verde? ___

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Justifiquen ampliamente cada uno de sus argumentos y los procedimientos empleados. En caso de dudas, soliciten el apoyo de su profesor y, con su ayuda, escriban sus conclusiones en el cuaderno.

De forma individual, realiza la siguiente actividad.

3. Se construyó un portarretrato a escala a partir de otro, los modelos obtenidos se muestran en la Figura 4.

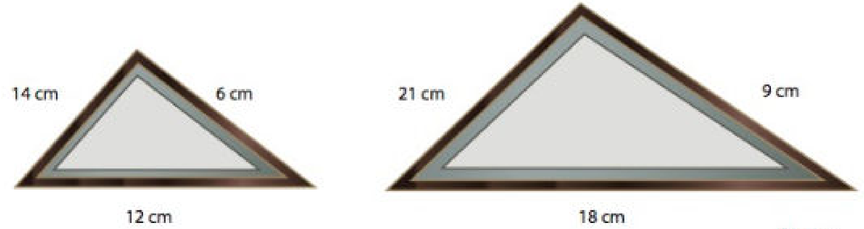


Figura 4

a) ¿Los modelos fueron construidos correctamente? Justifica.
b) ¿A qué escala están hechos los portarretratos?
c) ¿Puedes establecer una única escala? Argumenta.
d) ¿Los modelos son semejantes? Explica.

Compara los razonamientos y respuestas que has obtenido con tus compañeros y verifiquen que sus respuestas sean correctas.

Organizados en equipos, realicen las siguientes actividades.

4. Ana está construyendo un papalote que tiene las medidas que se muestran en la Figura 5.

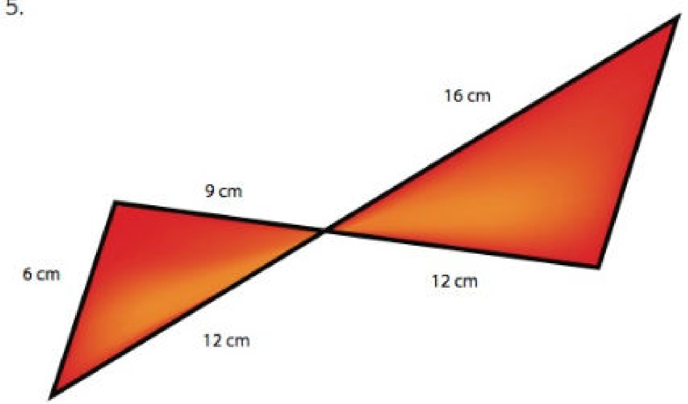


Figura 5

a) Ana olvidó medir un lado del papalote, ¿de qué forma es posible conocer este valor sin tener que usar una regla?
b) ¿Cuál es el valor del lado faltante? ___

RDT

Visita la siguiente dirección electrónica: http://www.hdt.gob.mx/GuiaSecundaria/guia/odas/SA3_MA_B2_OA_10039/index.html (última consulta: 11 de noviembre de 2013).
En el recurso digital interactivo podrás aplicar los criterios de semejanza de triángulos en la solución de problemas. Acude con tu profesor en caso de dudas.

5. La vista lateral de una piscina tiene la forma de la Figura 6, donde se ha marcado la línea visual de una persona que, parada a 1.16 m de la orilla de la piscina, alcanza a ver el fondo.

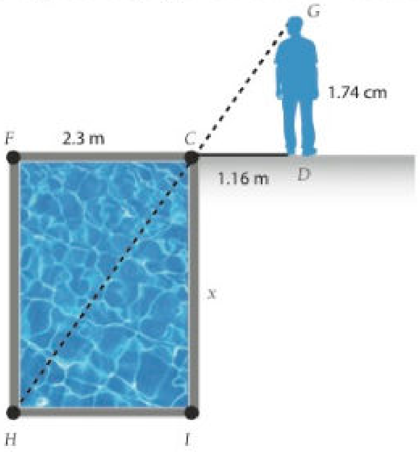


Figura 6

Analicen la Figura 6 y respondan las preguntas.

a) ¿Qué tipo de triángulos son CGD y HFC? ______
b) En el cuadrilátero $FCIH$ podemos ver que se forman dos triángulos, ¿son semejantes?, ¿qué criterios utilizaron? ______
c) ¿Qué profundidad (x) tiene la piscina? ______
d) ¿Cuál es la medida del segmento que va de G hasta H? ______
e) ¿Qué procedimiento emplearon para obtener las medidas?

6. A cierta hora del día, el sol proyecta una sombra sobre una persona y un árbol, como se muestra en la Figura 7.

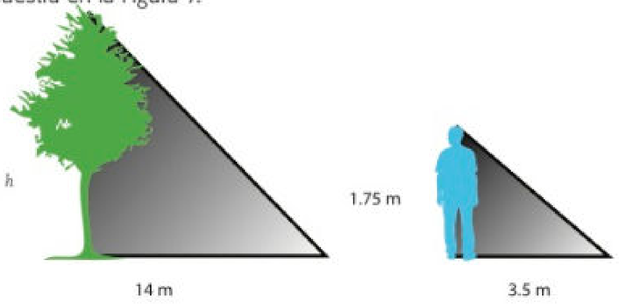


Figura 7

a) ¿Los triángulos que se forman son semejantes? Justifiquen.
b) ¿Cuál es la altura del árbol? ______

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Argumenten ampliamente los razonamientos y procedimientos empleados para solucionar las situaciones anteriores. En caso de dudas o diferencias, soliciten el apoyo de su profesor para resolverlas.

AUTOEVALUACIÓN

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Recordé los criterios de congruencia y semejanza de triángulos.		
Establecí la relación de semejanza entre triángulos basándome en los criterios.		
Calculé la razón de semejanza en los ejercicios correspondientes.		
Expresé mis reflexiones acerca de la resolución de este tipo de desafíos utilizando los criterios de semejanza y congruencia de triángulos.		

Vitaminas

Analicen y resuelvan las siguientes situaciones.

1. La Figura 8 muestra la vista frontal de un puente, donde la estructura metálica que se forma por los segmentos AB, DC, DA y CB es un rectángulo. Dos personas situadas en los puntos E y F respectivamente miran con el mismo ángulo la parte inferior de la estructura metálica. Justifiquen porqué se afirma que ambas personas se encuentran a la misma distancia de los correspondientes puntos A y B del puente.

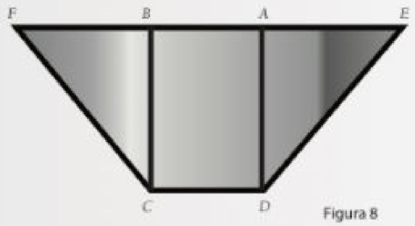


Figura 8

2. Mateo está haciendo un papalote que tiene la forma y medidas que se muestran en la Figura 9.

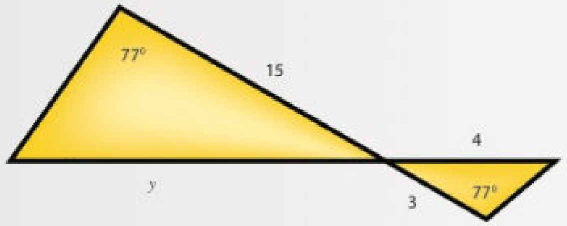


Figura 9

a) ¿Son semejantes los triángulos? Justifiquen.
b) ¿Cuál es el valor de y?

Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Si tienen dudas acudan con su profesor para que puedan establecer conclusiones acerca del tema y escríbanlas en su cuaderno.

Para concluir

En parejas, analicen los siguientes desafíos.

1. Mateo coloca un espejo en el suelo, como se muestra en la Figura 10, según su clase de ciencias los rayos de luz que inciden en un espejo se reflejan con un ángulo congruente al de incidencia. Mateo, quien mide 1.6 m de altura, coloca el espejo a 5 m del árbol y él a una distancia de 0.8 m del espejo puede ver la copa del árbol reflejada en el espejo.

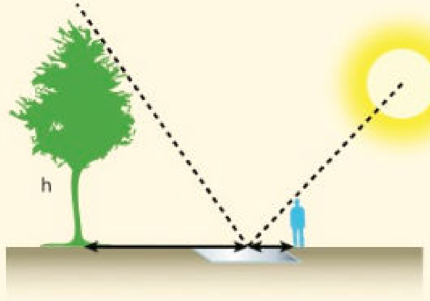


Figura 10

a) ¿Qué figuras geométricas forman el árbol y la persona?
b) ¿Cuál es la altura del árbol? ____________________

2. Los modelos de la Figura 11 están construidos a escala, con base en ellos respondan las siguientes preguntas:
a) ¿Cuál es el valor de x? ____________________
b) Calculen el valor de cada lado.
c) ¿Cuál es el valor del perímetro de cada triángulo? ____________________

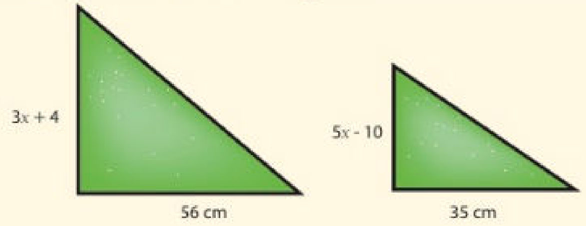


Figura 11

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Expliquen la manera como resolvieron los desafíos y los razonamientos en los que basan sus respuestas. Con ayuda de su profesor, hagan conclusiones sobre el tema estudiado.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre la aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de diversos problemas.

____

____

____

Lección 3 | Teorema de Tales

Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

Ventana

Analiza la siguiente situación.

1. Un segmento se dividió utilizando una hoja de un cuaderno de rayas, como se muestra en la Figura 1, con base en ella contesta las siguientes preguntas.

Figura 1

a) ¿En cuántos puntos cortan las paralelas (rayas del cuaderno) el segmento transversal?
b) ¿En cuántas partes quedó dividido el segmento?
c) ¿Son iguales en tamaño dichas partes?
d) ¿Cómo podrías dividir un segmento en siete o más partes iguales?

En parejas comparen sus respuestas y observaciones. Expliquen los procedimientos que pueden emplear para dividir un segmento en un número determinado de partes iguales.

Conexiones

En la lección anterior analizaste y resolviste problemas que involucraban semejanza y congruencia de triángulos, así como la utilización de la razón de proporcionalidad, estos conocimientos previos te serán de mucha utilidad para la resolución de algunos planteamientos de esta lección.

Manos a la obra

Reúnanse en parejas y analicen las siguientes situaciones.

1. Observen la Figura 2 en la que las líneas horizontales son paralelas entre sí.

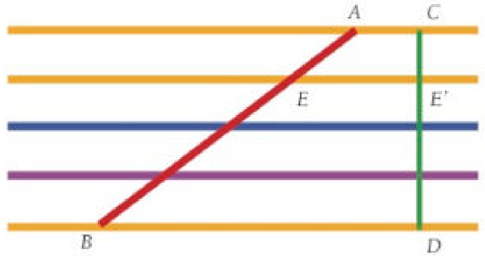


Figura 2

a) ¿En cuántas partes está dividida la recta de color verde? ¿Y la recta roja?
b) Identifiquen con una letra los puntos en los que cada paralela corta respectivamente a las rectas.
   - Midan los segmentos pequeños en los que quedó dividida la recta AB.
   - Midan los segmentos pequeños en los que quedó dividida la recta CD.

c) Calculen los cocientes de dividir las longitudes de los segmentos pequeños de la recta AB entre sus correspondientes segmentos en la recta CD. ¿Cómo son entre sí?
d) Si sólo consideran las paralelas de color amarillo, ¿en cuántas partes quedan divididas las rectas AB y CD?
   - ¿Las observaciones hechas en los incisos anteriores se conservan si se consideran los nuevos segmentos? Realicen los cálculos y argumenten.
   - Calculen la razón entre los segmentos AE y EB y compárenla con la razón $\frac{CE'}{E'D}$, ¿cómo son entre sí?
   - ¿Ocurrirá lo mismo si consideran otra línea paralela? Justifiquen su respuesta, apoyándose en la línea paralela de color rosa.
e) ¿Es posible establecer el mismo análisis si los puntos A y C son el mismo punto, es decir AB y CD parten de un punto común?
f) Analicen otros casos de líneas paralelas que cortan a dos líneas transversales.
g) ¿Qué pueden concluir acerca de los segmentos que se originan en dos rectas transversales cuando son cortadas por varias paralelas?

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Argumenten ampliamente sus observaciones y conclusiones. Con ayuda de su profesor lleguen a un consenso para escribir las conclusiones de forma grupal.

Continúen trabajando en parejas para realizar la siguiente actividad.

2. Dividan el segmento MN de la Figura 3 en partes cuya razón sea 3:5. Pueden emplear regla y compás. Expliquen el procedimiento que utilicen.

Figura 3

a) Si ahora necesitan dividir el segmento en ocho partes iguales, ¿la construcción anterior les puede ser útil? Justifiquen.
b) Ahora dividan el segmento MN en partes cuya razón sea $\frac{1}{4}$. Describan el procedimiento utilizado y justifíquenlo.

Comparen con otros compañeros sus trazos y expliquen cómo realizaron cada uno. Es necesario que argumenten la validez de sus procedimientos. En caso de dudas, acudan a su profesor.

Reunidos en equipos realicen la siguiente actividad.

3. Los alumnos de tercer grado de la escuela secundaria Nayarit están elaborando banderines con los que señalarán el camino por donde se llevará a cabo la maratón que se organiza anualmente.
El diseño de los banderines, realizado a partir de franjas verticales de diferentes colores, se muestra en la Figura 4.

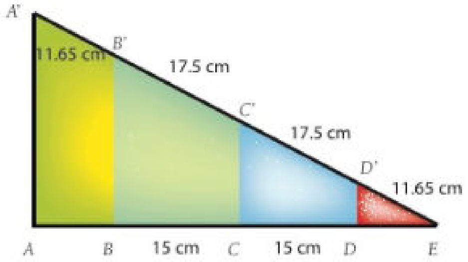


Figura 4

a) ¿Cuántos triángulos se forman en la figura?
b) ¿Qué características tienen entre sí estos triángulos?
c) ¿Cómo son entre sí las alturas de los triángulos?
d) ¿Qué relación existe entre los segmentos (ED', $D'C'$, $C'B'$, $B'A'$) que están sobre la diagonal del banderín (EA') y la medida del ancho de cada franja de color (ED, DC, CB, BA)?
e) ¿Qué medida tienen los segmentos AB y ED en el banderín? Expliquen su procedimiento.
f) Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

Acerca de...
Educación para la salud.
La práctica de actividades deportivas contribuye a mejorar la salud física y mental, además de transmitir valores y actitudes de socialización, responsabilidad y disciplina.

4. El espacio para actividades deportivas de la secundaria Nayarit tiene forma triangular como la Figura 5. Se ha trazado una línea paralela a uno de sus lados para dividir el espacio de modo que puedan entrenar las personas que participaran en la maratón, sin interferir las clases de Educación Física.

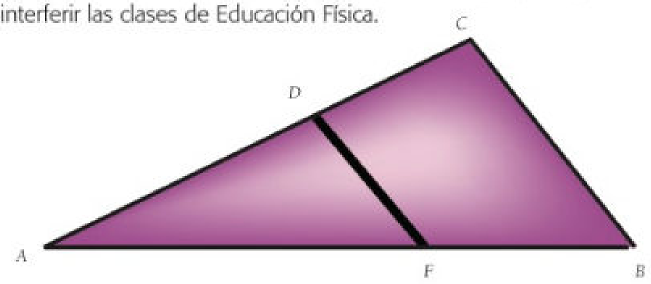


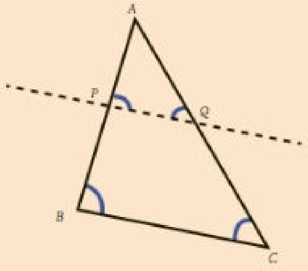
Figura 5

a) ¿Qué segmentos son paralelos?
b) ¿Cuántos triángulos pueden identificar en su construcción?
c) ¿Qué pueden concluir de los triángulos a partir de su construcción?
d) Si la línea paralela se traza con respecto a cualquiera de los otros dos lados, ¿cómo cambiarían sus observaciones respecto a las características de los triángulos involucrados?
e) Si el segmento AD mide el doble que el segmento DC, ¿cómo es el segmento AE respecto al segmento EB?
f) Son proporcionales los segmentos CB, ED, BA, y EA. Expliquen su respuesta.
g) Si DC midiera las dos terceras partes de AC, ¿cuál sería la longitud de los segmentos AE y EB?

Al terminar, comparen con otros equipos sus respuestas y expliquen los procedimientos que llevaron a cabo, así como el análisis de las figuras para resolver cada una de las situaciones anteriores. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Herramientas

Cuando dos o más paralelas cortan dos rectas transversales (secantes) AB y AC, los segmentos que se determinan sobre AB son proporcionales a los correspondientes segmentos determinados en AC y viceversa; si varias líneas cortan a otras dos AB y AC en segmentos proporcionales, entonces las líneas son paralelas.



Se puede conduir también que si en un triángulo ABC se traza una recta paralela a cualquiera de sus lados, los otros dos lados quedan divididos en segmentos proporcionales $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$
y que los triángulos que se forman son semejantes entre sí, cumpliéndose que $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{PQ}$
Las conclusiones anteriores son conocidas como **teorema de Tales.**

RDT

Visita la siguiente dirección electrónica:
http://www.hdt.gob.mx/new_media/secundaria_3/matematicas_b2/oda_2543_10037/recurso/ (última consulta: 11 de noviembre de 2013).
Resuelve actividades utilizando los criterios de semejanza y el teorema de Tales. Discute tus procedimientos y resultados con tus compañeros.

5. Continúen trabajando en equipos. Para calcular la altura del edificio de la secundaria Nayarit, a determinada hora del día, se midió la sombra que proyectaba el edificio al mismo tiempo que se medía la sombra de Luis, cuya estatura es de 1.65 m, como se muestra en la Figura 6.

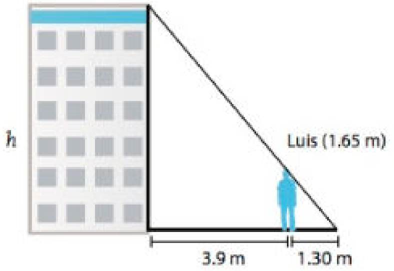


Figura 6

a) ¿Cuántos triángulos pueden observar en la Figura 6? __________
b) ¿Qué tipos de triángulos son? __________
c) ¿Se cumple el teorema de Tales en el problema planteado? Expliquen sus razonamientos. __________
d) ¿Cuál es la altura del edificio? Justifiquen su respuesta. __________

6. Un terreno tiene la forma que se presenta en la Figura 7, la parte gris fue rellenada de arena y la parte rojiza de arcilla.

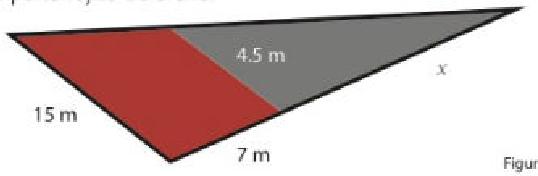


Figura 7

a) ¿Cuánto medirá el lado marcado con la letra x? __________
b) Si se requiere cercar para dividir cada parte del terreno y proteger la periferia del mismo, ¿cuántos metros de malla se requieren? Expliquen el procedimiento que emplearon. __________

7. En un almacén, se necesita construir una rampa que facilite descargar la mercancía de los camiones que llegan. La rampa tendrá una altura de 1.3 m, como se muestra en la Figura 8, y cada medio metro se colocará un soporte metálico para sostenerla.

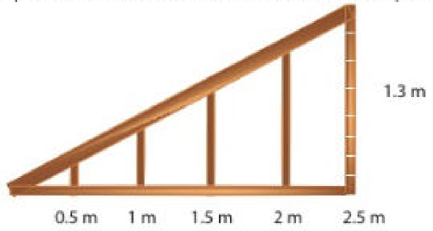


Figura 8

Con base en el análisis de la Figura 8, indiquen la medida que debe tener cada uno de los soportes.

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y verifiquen que sean correctos. Argumenten ampliamente cada uno de los procedimientos que utilizaron y cómo emplearon la información sobre las características de las figuras que intervinieron en cada situación. En caso de dudas o dificultades, soliciten el apoyo de su profesor.

RDT

Para apoyar el desarrollo de los contenidos analizados en esta lección, revisa el material multimedia de la página electrónica http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/semejanza_tales_long_circunferencia/teorematales.htm (última consulta: 23 de mayo de 2013).
Comparte con tus compañeros tus experiencias al revisar el material multimedia del sitio. En caso de dudas solicita el apoyo de tu profesor.

AUTOEVALUACIÓN

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Recordé y apliqué correctamente los criterios de semejanza de triángulos.		
Identifiqué las características que satisfacen las rectas que son cortadas por dos o más secantes.		
Apliqué correctamente el teorema de Tales en la solución de problemas.		

Vitaminas

Resuelve los siguientes problemas de forma individual.

1. El terreno triangular que se muestra en la Figura 9 se desea dividir en 4 partes para sembrar distintos tipos de flores; para ello, unen los puntos medios de cada uno de los lados del terreno.

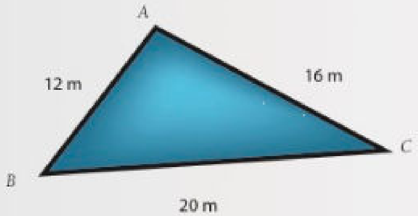


Figura 9

   a) ¿Cuántos triángulos se identifican en la figura?
   b) ¿Son semejantes estos triángulos con el original? Justifica tu respuesta.
   c) ¿Cuáles son las dimensiones del triángulo que se forma en el centro? Explica tu procedimiento.

2. Justifica ampliamente porqué al unir los puntos medios de cada uno de los lados de cualquier cuadrilátero se forma un paralelogramo.

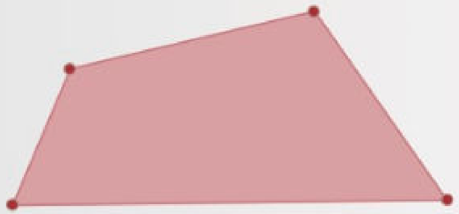


Figura 10

3. La luz de un faro proyecta en un velero la sombra de su mástil, dicha sombra tiene una longitud de 3 m, la altura real del mástil es de 5 m. Analiza la Figura 11.

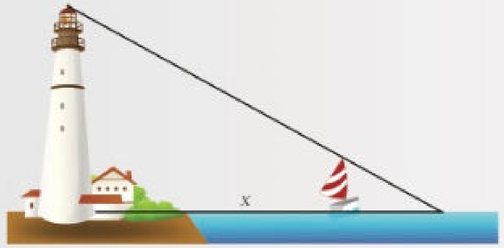


Figura 11

Si la altura del faro es de 120 m, ¿cuál es la distancia en la que están separados? Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

¿Sabías que..?

El salterio es un instrumento musical, parecido al arpa, en el que sus cuerdas colocadas en paralelo, no solamente cortan en segmentos proporcionales ambos lados del instrumento, sino que la reducción proporcional en las longitudes de las cuerdas permite un ascenso en el tono que se emite; es decir, cuanto más cortas las cuerdas, más agudo será el sonido. Por tanto, las cuerdas más largas emitirán un sonido más grave.

Para concluir

En parejas, analicen los siguientes desafíos.

1. Justifiquen por qué, también, es válido dividir el segmento AB en partes cuya razón es $\frac{2}{3}$ utilizando el procedimiento que se muestra en la Figura 12, donde AM y NB son líneas paralelas.

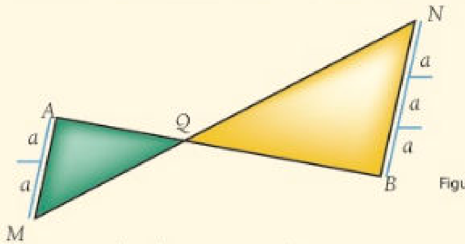


Figura 12

   Comparen sus argumentos con los de sus compañeros.

2. La Figura 13 muestra parte del croquis del recorrido de la maratón de la escuela secundaria Nayarit, donde se sabe que las calles 13 y 11 son paralelas. Sin embargo, al colocar los banderines para señalar el camino, se alteró el recorrido. La ruta original es la que está marcada con la línea punteada verde, y la parte del camino que se alteró está marcado con la línea punteada roja.

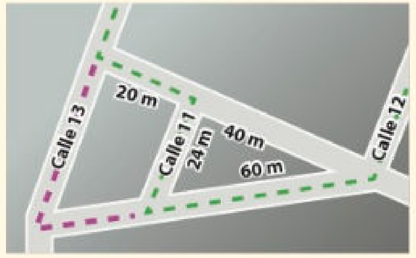


Figura 13

   a) Realicen los cálculos correspondientes para indicar cómo se altero el recorrido.
   b) ¿Cuál es la nueva distancia recorrida en esta parte de la maratón?

Compartan con sus compañeros los procedimientos que emplearon para resolver los desafíos. Al terminar, con ayuda de su profesor, escriban sus conclusiones en su cuaderno.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones acerca de la utilidad del teorema de Tales en la resolución de problemas geométricos.

Lección 4 | Figuras homotéticas

Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

Conexiones
En las lecciones 2 y 3 trabajaste con figuras semejantes y cálculos de proporciones, es necesario tener en cuenta todos esos conocimientos ya que serán de gran ayuda para desarrollar con éxito la presente lección.

Ventana

1. En equipos de 4 personas reúnan el siguiente material.
   - caja de zapatos (30 cm de largo).
   - papel o pintura de color negro.
   - una hoja de color negro.
   - papel vegetal o albanene.
   - cinta adhesiva negra.
   - un alfiler.
   - una tela opaca de color oscuro.

En las dos caras opuestas a lo largo, recorten en el centro de la primera un cuadrado de aproximadamente 1 cm de lado, en la otra cara recorten una ventana que abarque casi toda el área, tal como se muestra en la Figura 1.

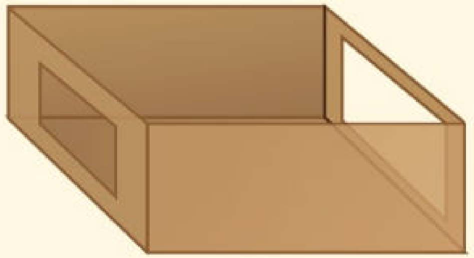


Figura 1

Peguen un cuadro de papel de color negro sobre el agujero cuadrado de 1 cm. Con el alfiler, hagan un orificio muy fino en el papel de modo que quede en el centro del agujero. El diámetro del orificio debe ser aproximadamente de medio milímetro. Para que el agujero quede perfectamente redondo, giren un poco el alfiler, cuidando que no aumente el diámetro.

Pinten o forren de negro el interior de la caja y su tapa, sellen las esquinas y aristas con cinta adhesiva, para evitar cualquier entrada de luz como se indica en la Figura 2.

Cubran la ventana de la caja con papel vegetal o albanene, ésta será la pantalla.

Pongan su tapa a la caja.

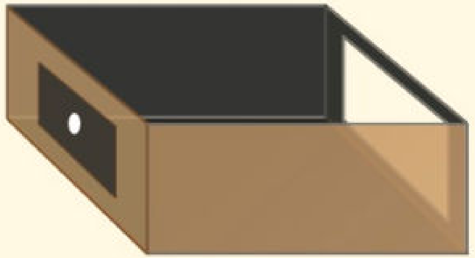


Figura 2

Coloquen sobre una mesa una vela encendida o un foco.

Por turnos, observen la vela a través de la pantalla de papel albanene, de modo que el orificio pequeño quede frente de la vela; para que vean mejor la imagen, cúbranse con la tela. Observen la Figura 3.

Figura 3

a) Describan la imagen que observan en la pantalla.
b) ¿Qué pasa con la imagen si se alejan de la vela? Describan su observación.
c) ¿Qué pasa si se acercan al objeto? Expliquen.
d) ¿Cómo podrían mejorar la imagen obtenida?

Comparen con otros compañeros sus respuestas y observaciones. En caso de dificultades, acudan a su profesor.

Manos a la obra

Continúen trabajando en equipos y realicen la siguiente actividad.

1. Trabajen nuevamente con la caja negra que construyeron.
   a) Colóquense a una distancia de la vela o foco de forma que logren una imagen lo más nítida posible en la pantalla.
   b) Con un flexómetro o una cinta métrica, midan la distancia del objeto al orificio y del orificio a la imagen que se produce.
   c) Calculen la razón entre estas distancias.
   d) Midan la altura del objeto y la de la imagen.
   e) Escriban el resultado de la razón del tamaño de la imagen y el objeto.
   f) ¿Cómo son entre sí las razones de los incisos c y e?
   g) Observen otros objetos, procuren que haya buena iluminación para ver mejor los objetos. Si es un día soleado pueden trabajar en el patio de la escuela.
   h) Repitan el análisis anterior con varios objetos y establezcan una conclusión.

Confronten sus razonamientos con los de sus compañeros. Pongan a consideración del grupo sus conclusiones y resultados, al terminar escriban en su cuaderno sus reflexiones.

En parejas lleven a cabo la siguiente actividad.

2. Con una lámpara se ha alumbrado una pequeña escultura, la cual proyecta una sombra de mayor tamaño sobre la pared, como se observa en la Figura 4 de la siguiente página.
   Se han trazado semirrectas que asemejan los rayos de luz de la lámpara. Cada semirrecta parte de la lámpara y une cada vértice de la figura original y su sombra.

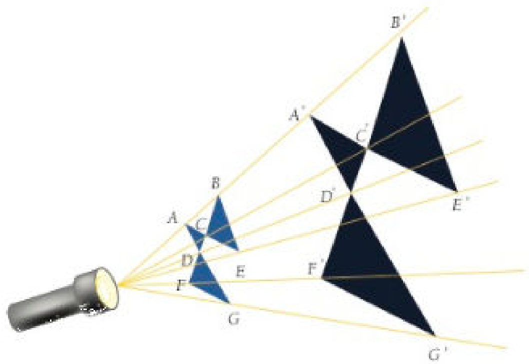


Figura 4

Realicen las mediciones necesarias para contestar las siguientes preguntas:

a) Si se denota al origen de los rayos de la lámpara como el punto O, ¿cuál es la distancia de los segmentos OA y OA'? ______________________

b) ¿Cuál es la razón entre OA y OA'? ______________________

c) ¿Cuál es la distancia de OG y OG'? ______________________

d) ¿Cuál es la razón entre OG y OG'? ______________________

e) ¿Qué tienen en común las dos razones calculadas? ______________________

f) Midan las demás distancias que hay entre el punto O y los correspondientes puntos en la escultura y su sombra. Calculen las razones entre ellas y compárenlas entre sí.

g) ¿Qué pueden concluir al respecto?

3. Analicen una sección de la escultura y su respectiva sombra.

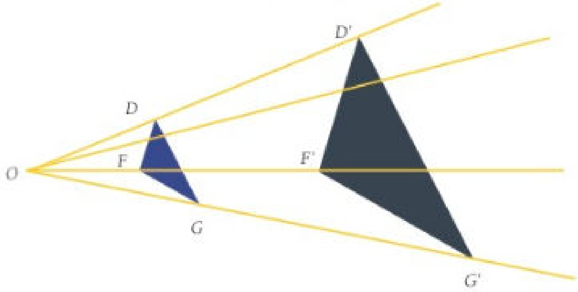


Figura 5

a) Con base en las observaciones anteriores y la Figura 5, ¿qué pueden concluir acerca de los segmentos DG y $D'G'$? Justifiquen.

b) Analicen cada uno de los segmentos de la sección de la escultura y su sombra.

c) ¿Qué relación tienen entre sí los triángulos DFG y $D'F'G'$?

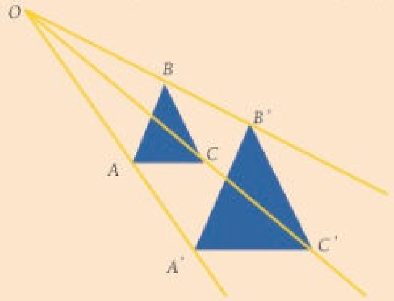
d) Verifiquen sus observaciones analizando las otras secciones de la escultura y sus sombras producidas.

De manera grupal, comparen sus observaciones con las de sus compañeros, discutan acerca de las características de este tipo de figuras y cómo se producen unas a partir de otras. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Herramientas

Una **homotecia** es una transformación de una figura tomando como referencia un punto O llamado **centro de homotecia** y un número r conocido como **razón de homotecia.**
En dos figuras homotéticas, construida una a partir de otra se cumple que:

$$r = \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'}$$



Por lo que se puede concluir (¿cómo?) qué dos figuras homotéticas son semejantes.

Reúnete con otro compañero para resolver las siguientes actividades.

4. La Figura 6 muestra el diseño base para un vitral. Utilizando el punto O como centro de homotecia, para el punto A ubiquen el punto A' tal que la distancia de OA' sea tres veces la distancia OA.
Para facilitar el análisis, copien el diseño y la ubicación del punto O en su cuaderno. Repitan lo mismo con los puntos B, C, D, E y F, para ubicar los puntos B', C', D', E' y F'. Unan los puntos para analizar el nuevo diseño.

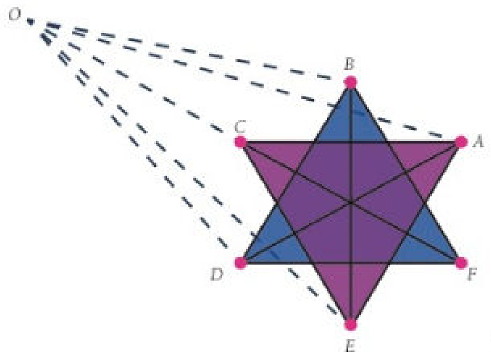


Figura 6

a) ¿Cómo son las dimensiones del nuevo diseño con respecto a la figura original?

b) ¿Cuál es la razón de homotecia? ______________________

c) Describan la ubicación de la figura homotética tomando como referencia la figura original y el centro de homotecia.

5. Ahora, tracen otra figura homotética de manera que los puntos *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, *E'* y *F'* sean tales que sus respectivas distancias al punto *O*, midan la mitad de las distancias de los puntos originales.

a) ¿Cómo son las dimensiones de este nuevo diseño con respecto al original?
b) Describan la ubicación de la figura homotética tomando como referencia la figura original y el centro de homotecia.
c) ¿Cuál es la razón de homotecia? ¿Qué signo tiene?
d) ¿Qué pueden concluir acerca de las características de una figura homótetica cuando la razón de homotecia es un número mayor que 1?
e) ¿Cuáles son las características de una figura homotética cuando la razón de homotecia es un número positivo menor que 1?
f) ¿Cómo son entre sí las figuras cuando la razón de homotecia es igual a 1?

Presenten sus razonamientos a sus compañeros y, de manera grupal, escriban una conclusión en su cuaderno acerca de los características que pueden deducir a partir de la razón de homotecia.

Nuevamente en equipos, lleven a cabo la siguiente actividad.

6. Consideren la Figura 7 y el punto *O* como centro de homotecia.

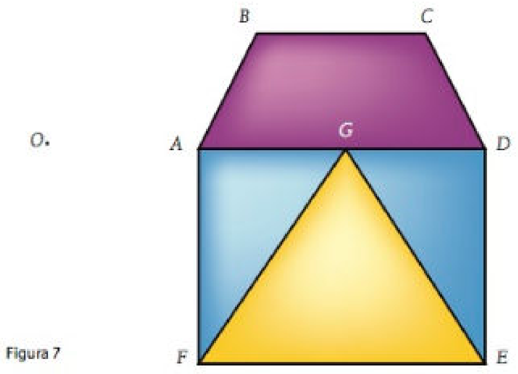


Figura 7

a) Tracen el segmento *OA* y prolónguenlo hacia el lado izquierdo del punto *O* de manera que sobre la prolongación se ubique el punto *A'* tal que la distancia *OA'* sea igual a la distancia *OA*. De la misma manera ubiquen los puntos *B'*, *C'*, *D'*, *E'*, *F'* y *G'*.
- Describan cómo es la figura formada con respecto a la figura original.
- Tomando como referencia la figura original y el centro de homotecia, ¿cuál es la posición de la figura homotética?

b) Supongan que el punto *O* es el origen de un plano cartesiano, ¿qué sentido tienen las distancias *OC* y *OC'*?
- ¿Cuál es la distancia de *OC* y *OC'*?
- Considerando el sentido de las distancias, ¿cuál es la razón entre *OC* y *OC'*?
- Midan las demás distancias, considerando el sentido de las mismas y calculen las correspondientes razones.
- ¿Cuál es la razón de homotecia?

c) Analicen ambas figuras, e identifiquen qué características se conservan de la figura original.
d) ¿Cómo relacionan la figura que acaban de trazar con las imágenes que observaron al inicio de la lección, con la caja negra?

Comparen sus respuestas y reflexiones con las de sus compañeros.

7. Consideren la Figura 8, tracen la correspondiente figura homotética tomando como centro el punto *O* y razón de homotecia 2.

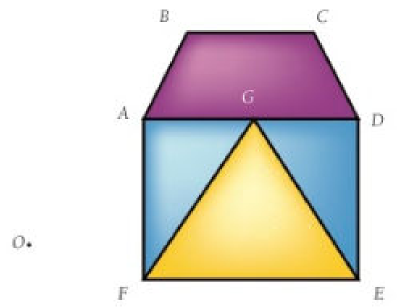


Figura 8

a) Determinen el perímetro y área de cada figura. ____________
b) ¿Cuál es la razón entre los perímetros? ____________
c) ¿Cuál es la razón entre las áreas? ____________
d) Sin hacer los trazos, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la figura resultante con razón de homotecia 5? ____________
e) ¿Qué relación existiría entre el perímetro y el área de esta nueva figura con los de la figura original? ____________
f) ¿Qué relación hay entre la razón de homotecia y la manera como cambia el perímetro y el área de las figuras resultantes? Expliquen.

Pongan a consideración del grupo sus respuestas y razonamientos. Con apoyo de su profesor, complementen lo que han escrito en su cuaderno acerca de las características de figuras homotéticas.

AUTOEVALUACIÓN — Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Identifiqué las características de una figura a partir de la razón de homotecia.		
Relacioné el signo de la razón de homotecia con la posición de la figura resultante.		
Analicé la relación entre la manera en que cambia el perímetro y área de una figura homotética y la razón de homotecia.		
Compartí mis observaciones y reflexiones con mis compañeros para establecer conclusiones.		

¿Sabías que..?

Las imágenes que se exhiben en las salas de cine, son una figura homotética; ya que el proyector que se emplea cuenta con una potente lámpara y cuando la fuente de luz pasa por la cinta las imágenes pequeñas se proyectan a gran tamaño en la pantalla del cine.

Vitaminas

Analiza las siguiente situaciones.

1. Bajo la luz de una lámpara u otra fuente de luz, coloca tu mano abierta en posición horizontal.
   a) Si colocas tu mano a la misma longitud de la fuente de luz y el piso, ¿cuál es la razón de homotecia de la sombra?
   b) ¿Dónde tienes que poner tu mano para que la sombra mida el triple de tu mano?

2. Construye una figura homotética a partir de la Figura 9, cuya razón de homotecia sea 3.5.

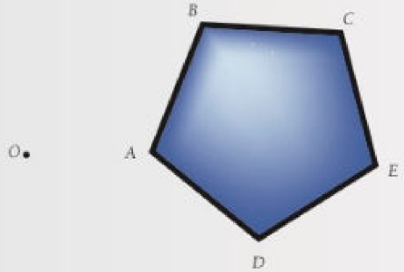


Figura 9

   a) ¿De qué lado queda la proyección de la figura?
   b) ¿Son semejantes las figuras? Explica tu respuesta.
   c) ¿Cuál es la razón entre los perímetros y las áreas?

3. Con base en la Figura 10, describe cómo será la figura resultante si se aplica una razón de homotecia igual a $-\frac{1}{2}$.

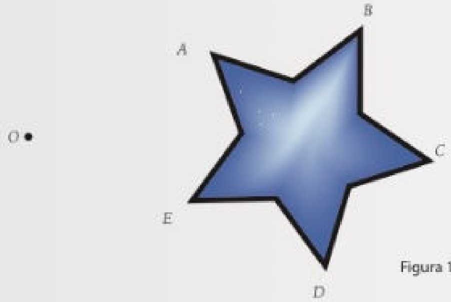


Figura 10

Compara tus resultados con tus compañeros y verifiquen que sean correctos.

Para concluir

En parejas, analicen el siguiente desafío.

1. La Figura 11 muestra dos figuras homotéticas (estrellas 2 y 3) obtenidas a partir de la original (estrella 1).

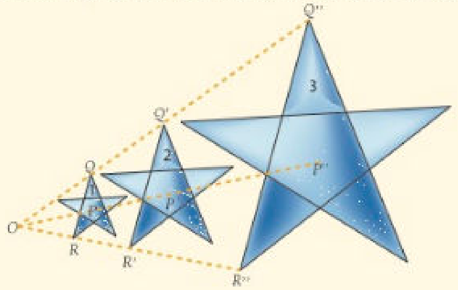


Figura 11

   a) Identifiquen el centro de homotecia de cada estrella, ¿cuántos centros hay?
   b) ¿Qué tienen en común las tres figuras?
   c) Si OP mide 5 cm, OP' mide 10 cm, $P'P''$ mide 10 cm y QR 4 cm, ¿cuánto mide $Q''R''$?
   d) ¿Cuál es la razón de homotecia de la estrella 2 con respecto a la estrella 1?
   e) ¿Cuál es la razón de homotecia de la estrella 3 con respecto a la 2?
   f) ¿Cuál es la razón de homotecia de la estrella 3 con respecto a la 1?
   g) ¿Cómo podrían obtener la tercera estrella a partir de la segunda?
   h) Supongan que trazan una cuarta estrella de modo que la razón entre ésta y la tercera estrella es 3, conservando el mismo centro. ¿Qué tendrían que hacer para trazarla nuevamente con estas características, pero a partir de la primera estrella?
   i) ¿Y si fuera a partir de la segunda?

Cuando se generan varias figuras homotéticas, una a partir de la anterior con un mismo centro de homotecia, se dice que es una **composición de homotecias.**

   j) A partir del análisis anterior, expliquen qué relación hay entre las razones que generan cada homotecia y la razón entre la última homotecia y la original.

Comparen sus razonamientos con los de sus compañeros y de manera grupal, con ayuda de su profesor, establezcan sus conclusiones.

RDT

Visita la página electrónica http://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=14962&referente=docentes (última consulta: 29 de mayo de 2013).
En ella encontrarás varios recursos que te servirán para apoyar el desarrollo de los contenidos analizados en esta lección. Comparte con tus compañeros tus experiencias al revisar el material multimedia del sitio. Consulta a tu profesor en caso de dudas.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre la aplicación de los criterios de semejanza para la construcción de figuras homotéticas y las características de éstas.

Lección 5 | Gráficas de funciones cuadráticas

Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

Ventana

De forma individual, resuelve la siguiente actividad.

1. Para calcular la cantidad de madera útil al cortar un árbol en un aserradero, se analiza cómo varía el área transversal de un tronco en función del diámetro, ya que éste disminuye conforme se acerca a la copa. Cabe mencionar que en las técnicas de dendrometría se considera como un círculo la sección transversal de un tronco.

a) Completa la Tabla 1 con los valores correspondientes a esta situación:

Diámetro (m)	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60
Área (m²)	0.16π	0.141π			0.09π

Tabla1

b) ¿Qué relación existe entre el conjunto de variables involucradas?
c) ¿Cuál de las variables depende de la otra?
d) ¿Qué expresión algebraica describe la situación anterior?
e) Con base en la expresión encontrada, ¿es posible determinar el área transversal para cualquier diámetro? Justifica tu respuesta.
f) Construye en tu cuaderno la gráfica de los datos anteriores. ¿Qué forma tiene?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Analicen la expresión algebraica obtenida y verifiquen que modela la situación anterior. Con respecto a la gráfica, describan la forma que observan.

Glosario

dendrometría. Disciplina que estudia la medición del árbol desde el punto de vista estático. Incluye las técnicas de medición de los distintos componentes del árbol y sus dimensiones.

Conexiones

En grados anteriores, analizaste problemas que se modelaban con funciones lineales a través de la lectura y construcción de sus graficas. Asimismo, en la lección 5, del bloque 1 de tercer grado representaste por medio de tablas y algebraicamente relaciones de variación cuadrática, estos contenidos te serán de ayuda en el desarrollo de la presente lección.

:: | Manos a la obra

Reúnanse en parejas y analicen las siguientes situaciones.

1. Se realizó un experimento que consistía en dejar caer un objeto desde cierta altura registrando la distancia recorrida en distintos momentos. Los datos obtenidos se muestran en la Tabla 2.

Tiempo (s)	0	1	2	4	6
Distancia (m)	0	4.9	19.6	78.4	176.5

Tabla2

a) Construyan en el plano de la Figura 1 la gráfica de los datos de la Tabla 2. Asignen los nombres de los ejes.
b) ¿Qué forma tiene la gráfica?
c) Los datos de la Tabla 2, ¿representan una función lineal? Justifiquen.
d) A partir del análisis de los datos de la Tabla 2, determinen la expresión algebraica de la función que describe los datos presentados.
e) ¿Qué tipo de expresión algebraica es?
f) ¿Cómo pueden verificar que la expresión que encontraron es correcta?
g) ¿Cuál es la distancia que recorrió el objeto a los 5 segundos?
h) Comparen sus respuestas con las de otras parejas explicando los procedimientos empleados.

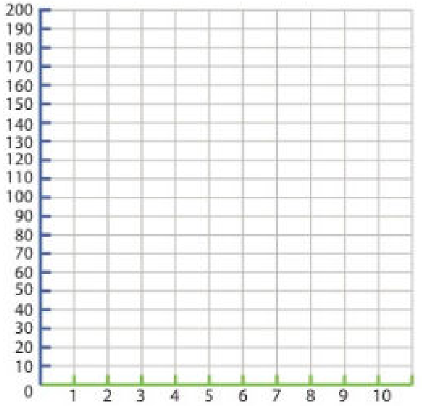


Figura 1

Herramientas

Para analizar los datos de una gráfica lineal o cuadrática, es necesario buscar la expresión algebraica, tal que los puntos satisfagan una función $y(x) = ax^2 + bx + c$ o bien $y(x) = ax + b$.
Donde la expresión $y(x)$, indica que el valor de y depende del valor de x, es decir, y está en función de x.
Con los datos de la gráfica se pueden establecer relaciones entre los puntos o ecuaciones, ya que todos los pares de puntos (x_k, y_k) conocidos cumplen que:

$$y_k = ax_k^2 + bx_k + c \text{ o bien } y_k = ax_k + b.$$

Y así, tras el análisis y resolución de las ecuaciones establecidas se puede determinar la expresión algebraica correspondiente.

2. Un golfista efectúa un tiro, se observa que conforme trascurre el tiempo la altura de la pelota varia. Los datos que se dieron en la pantalla de un espectacular se muestran en la Tabla 3.

Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4	5
altura (pies)		64	96	96	64	0

Tabla 3

a) ¿A qué altura se encuentra la pelota en el instante en que es golpeada? Completa la Tabla 3 con este dato.

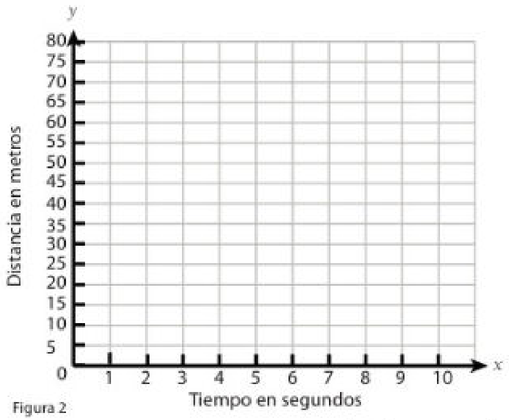


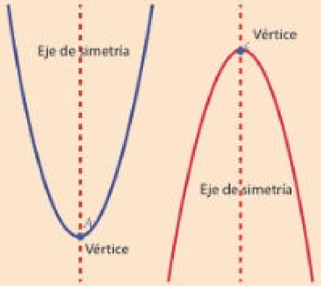
Figura 2

b) ¿Cuánto tiempo transcurre desde que el golfista golpea la pelota y ésta cae al suelo?
c) Ubica los puntos de la Tabla 3, en el plano de la Figura 2 y construye la gráfica.
d) ¿En cuánto tiempo asciende la pelota y llega al punto más alto?
e) ¿En cuánto tiempo desciende la pelota hasta llegar al suelo?
f) ¿Cuál es la función que describe esta situación?
g) Con ayuda de la gráfica y la función, ¿qué se puede deducir de la situación si $t = 2.5$ s?
h) ¿Cuál es la altura máxima de la pelota de golf?

Comparen sus resultados con los de sus compañeros y comenten los procedimientos que llevaron a cabo para resolver cada una de las situaciones anteriores. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

Herramientas

La gráfica en el plano cartesiano de una función cuadrática $y(x) = ax^2 + bx + c$ es una curva conocida como **parábola.**



De donde podemos deducir lo siguiente:
- ✓ Si el término ax^2, es positivo, la parábola abrirá hacia arriba.
- ✓ Si el término ax^2 es negativo, la parábola abrirá hacia abajo.

En equipos, realicen las siguientes actividades.

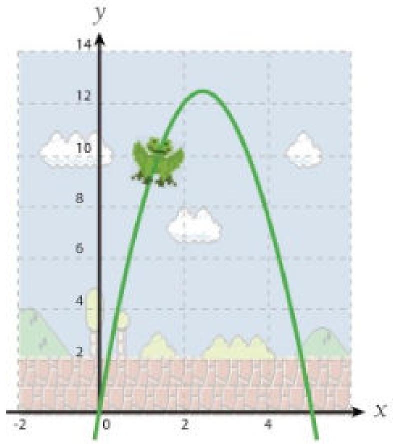


Figura 3

3. En un juego de video se ve una rana que salta de un lado a otro. Se puede medir la altura que alcanza el salto en función del tiempo que lo hace, tal como lo muestra la gráfica de la Figura 3.

Si en el eje X se grafica el tiempo en segundos y en el eje Y la altura que alcanza la rana, contesten:

a) ¿En qué momento la rana alcanza la mayor altura?
b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la rana?
c) ¿En qué momento la rana estará a una altura de 8 cm?
d) ¿Cuánto tiempo tarda la rana en caer al suelo?
e) ¿Cuál es la función que describe la gráfica mostrada?
f) ¿Qué características tiene la expresión encontrada?
g) Verifiquen sus observaciones por medio de la función que establecieron.

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros, asegúrense de que las funciones que encontraron son correctas.

4. La gráfica de la Figura 4 describe la trayectoria de un proyectil disparado desde cierto lugar. El eje de las abscisas corresponde al tiempo medido en segundos y el eje de las ordenadas a la altura alcanzada en ese tiempo, medida en metros.
   a) ¿En qué puntos la gráfica interseca al eje X y Y, respectivamente?
   b) ¿Qué altura tenia al momento de ser disparado?
   c) ¿En cuánto tiempo toca el suelo?
   d) Encuentren la expresión algebraica que describe esta situación.
   e) Con base en su expresión, encuentren la altura que alcanza en 3.5 s y 6.5 s.

Figura 4

RDT

Visita la siguiente dirección electrónica: http://www.hdt.gob.mx/new_media/telesecundaria_3/matematicas_b2/oda_3196_0/recurso/ (última consulta: 11 de noviembre de 2013). Analiza distintas gráficas de ecuaciones de segundo grado y comparte tus observaciones con tus compañeros.

Compartan con sus compañeros los procedimientos que siguieron para resolver los problemas planteados. Al terminar, escriban sus conclusiones en su cuaderno.

AUTOEVALUACIÓN

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Construí, a partir de los datos de una tabla, gráficas de funciones cuadráticas que modelan distintas situaciones.		
Analicé e interpreté información referente a las situaciones, a partir de las gráficas presentadas.		
Identifiqué la forma de la gráfica de una ecuación de segundo grado, de acuerdo con las características de la expresión algebraica que la origina.		
Compartí con mis compañeros mis reflexiones y escuché con atención su participación.		

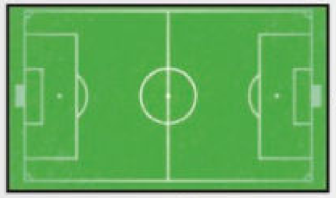
RDT

Revisa el material multimedia de la página electrónica http://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=15182 (última consulta: 28 de mayo de 2013).
En la página anterior podrás apoyar el desarrollo de los contenidos analizados en esta lección. Comparte con tus compañeros tus experiencias al revisar el material del sitio.

Vitaminas

Analiza las siguiente situaciones, realiza las gráficas en tu cuaderno.

1. La cancha de futbol de un deportivo tiene forma rectangular, observa la Figura 5, el largo de la cancha mide 20 metros más que su ancho.



y

$y + 20$

Figura 5

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que describe el área en términos de sus dimensiones?
b) ¿Qué tipo de expresión encontraste? ¿Qué características tiene? Justifica tu respuesta.
c) ¿Qué área tendrá el terreno si $y = 20$ m? ¿Qué área si $y = 25$ m?
d) ¿Qué dimensiones tendrá el terreno si el área es de 1560 m²?
e) Grafica la expresión algebraica que encontraste.

2. Supón que cierta población es atacada por un virus cuyo comportamiento se rige por la función $f(t) = t^2 + 6t$, donde t son los meses en que se propaga el virus y $f(t)$ el número de contagiados.
a) Realiza una tabulación para ver cómo se propaga el virus en los meses siguientes.
b) Construye la gráfica de los datos de tu tabla.
c) Si se tardara un año en encontrar la cura, ¿cuántos infectados habría en ese tiempo?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Argumenten ampliamente los procedimientos empleados.

Glosario

pie tabla. Unidad que equivale a una pieza cuadrada de 1 pie por lado y 1 pulgada de espesor.

Para concluir

En parejas, analicen los siguientes desafíos.

1. En la industria forestal, la fórmula que proporciona el volumen o cantidad de madera aserrada que puede producir un tronco en función de su diámetro se conoce como regla o escala internacional, la cual expresa el volumen en unidades pie tabla.

La gráfica de la Figura 6 representa la relación entre datos obtenidos en un aserradero, a partir de la regla internacional. El diámetro del tronco se ha medido en pulgadas y el volumen en pies tabla. Esta regla considera también la pérdida por corte y contracción.

a) ¿Qué diámetros es preferible no procesar debido a los gastos que implica?
b) ¿Cómo deben escogerse los árboles en el aserradero para procesarse?

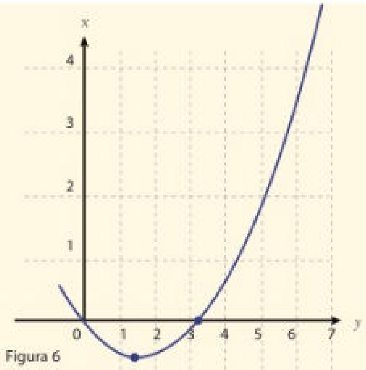


Figura 6

c) A partir del análisis de los puntos de la gráfica, obtengan la expresión algebraica que determina la regla o escala internacional.
d) ¿Qué signo tiene el término cuadrático?
e) ¿Por qué la gráfica no toma valores en el lado izquierdo del eje X? Justifiquen su respuesta.
f) ¿Cuántos pies tabla pueden ser obtenidos de un tronco con 10 pulgadas de diámetro?
g) Comparen su análisis con el de sus compañeros.

2. Una compañía de recolección de desechos reciclables obtiene ingresos por cada camión cargado, estos ingresos se pueden ver en la Tabla 4.

a) Construyan en su cuaderno la gráfica de los datos de la Tabla 4.
b) Con base en los datos de la tabla, ¿qué le conviene más a la empresa implementar, una flota de 3 o 15 camiones? Expliquen.
c) Muestren sobre la gráfica cuántos camiones debe de mantener la empresa como mínimo en una colonia para no perder ingresos.
d) ¿Cuánto perderá la compañía en los días festivos, en los que los empleados no trabajan? Muestren esto en la gráfica.
e) ¿Cuál es el modelo matemático que describe mejor el conjunto de datos?
f) ¿Cuál será la ganancia de la empresa si tiene 5 rutas de 5 camiones cada uno?

Número de camiones	Ingreso ($)
2	-42
4	44
6	138
8	240
10	350
12	468
14	594
16	728

Tabla 4

Comparen sus razonamientos con sus compañeros. Expliquen ampliamente los procedimientos empleados. En caso de dudas, acudan a su profesor para resolverlas.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre el análisis de gráficas de funciones cuadráticas para la resolución de diversos desafíos; así como las ventajas de su uso.

Lección 6 | Lectura y construcción de gráficas

Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

Conexiones

En segundo grado, y en la lección anterior de este libro, has analizado problemas que involucraban la construcción de una expresión algebraica lineal o cuadrática, así como la construcción y lectura de sus representaciones gráficas, para obtener información adicional de las situaciones que representan. Retomar esos contenidos te será de utilidad en el desarrollo de esta lección.

Ventana

Analiza las siguientes situaciones.

1. En un estudio de camionetas, se obtuvo la gráfica de la Figura 1 de la trayectoria de una camioneta cuando viajaba a velocidad constante.

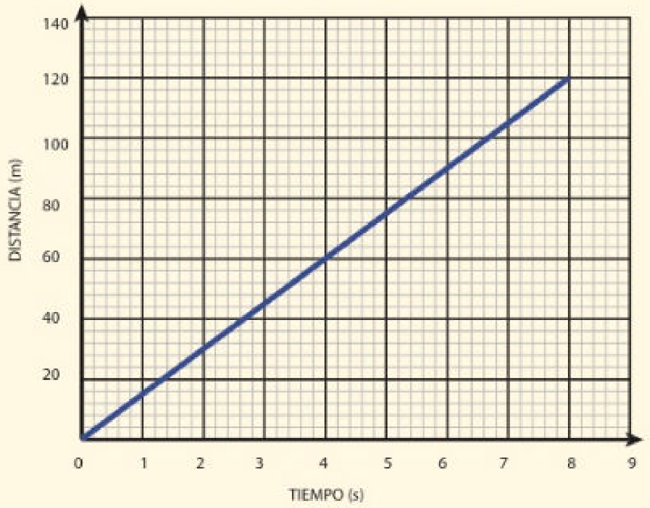


Figura 1

a) Con la información en la gráfica completa la Tabla 1.

Distancia (m)	60	d_2	90	105	
Tiempo (s)	4	5	6	t_4	

Tabla1

b) ¿Qué distancia habrá recorrido a los 5 s? __________

c) ¿En cuánto tiempo habrá recorrido 105 m? __________

d) ¿Qué tipo de relación representan los datos de la gráfica y de la tabla? Justifica tu respuesta.

e) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa dicha relación? __________

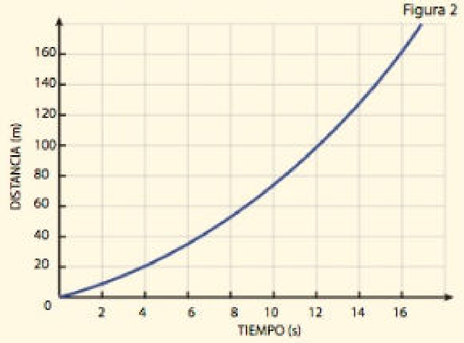
f) ¿Por qué la gráfica comienza en (0,0)? __________

g) ¿Qué distancia habrá recorrido al cabo de una hora? __________

2. Ahora la camioneta comienza a cambiar su velocidad, obteniéndose la gráfica de la Figura 2.
   a) ¿Qué tipo de gráfica se representa?
   b) ¿Qué tipo de relación tienen los datos?
   c) ¿Cuál será la expresión algebraica que describe a la gráfica?
   d) ¿Cuál será la distancia recorrida en una hora?
   e) ¿Por qué cambia la gráfica cuando la velocidad comienza a variar?

   Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Discutan acerca del análisis que realizaron en cada una de las gráficas para obtener las expresiones algebraicas y la información que se solicitaba. En caso de dudas o dificultades, acudan a su profesor.

Figura 2



:: | Manos a la obra

Reúnanse en parejas y analicen las siguientes situaciones.

1. La gráfica de la Figura 3 corresponde a un día en el que Mateo se dirigió a la escuela, al llegar permaneció un tiempo ahí, esperando para entrar, hasta que las autoridades de la escuela salieron a anunciar que, por ese día, se suspendían las clases. Así, Mateo tuvo que volver a su casa.

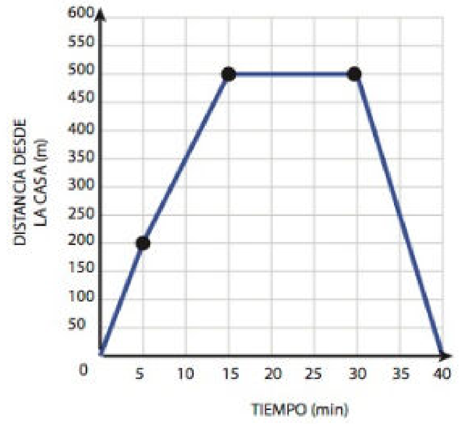


Figura 3

a) ¿Cuál es la distancia total que recorre Mateo? __________

b) ¿Cuánto tiempo hace de su casa a la escuela? __________

c) ¿Con qué velocidad se desplazó en los primeros 5 minutos? ¿Cuánto tiempo tuvo que esperar Mateo hasta que se enteró que se suspendían las clases?

d) ¿Qué se puede decir acerca del desplazamiento de los 30 a los 40 minutos?

e) ¿Cuál es la velocidad promedio de todo el trayecto? __________

f) Si de su casa sale a las siete de la mañana, ¿a qué hora llega a la escuela?

2. En un experimento de laboratorio se observó lo siguiente:
"El objeto parte del reposo, al cabo de 3 s adquiere una velocidad de 3 m/s y permanece con esa velocidad durante 5 s. En ese momento, aumenta su velocidad hasta llegar a 10 m/s al cabo de 3 s; posteriormente, desacelera durante 6 s hasta detenerse".
   a) Organicen, en su cuaderno, los datos que describe la situación, pueden emplear una tabla.
   b) Con estos datos elaboren una gráfica en su cuaderno.
   c) A partir del análisis de la gráfica indiquen qué distancia habrá recorrido el objeto entre los 5 s y 9 s.

3. Analicen la gráfica de la Figura 4.

RDT

Visita la siguiente dirección electrónica: http://www.hdt.gob.mx/new_media/secundaria_2/matematicas_b4/oda_5237_0/recurso/ (última consulta: 11 de noviembre de 2013). Analiza la gráfica de una situación de movimiento. Compara con otros compañeros tus reflexiones.

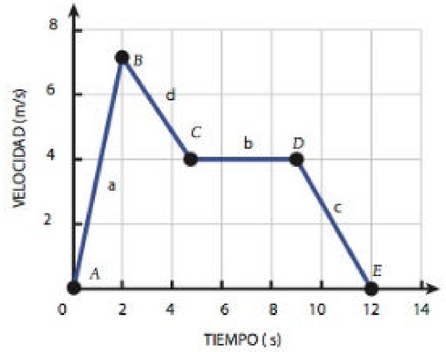


Figura 4

   a) Si la gráfica representa la velocidad de un móvil en términos del tiempo, describan su movimiento.
   b) ¿Qué distancia recorrió del punto A al B, y de D a E? ______________
   c) ¿Cómo es la velocidad en el trayecto de C a D? ______________

Comparen sus resultados con los de sus compañeros y comenten los procedimientos que llevaron a cabo para resolver cada una de las situaciones anteriores. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

En equipos, analicen las siguientes situaciones.

4. Una solución es sometida a un calentamiento para después analizar la manera en que varía su temperatura en el medio ambiente, la gráfica se muestra en la Figura 5.

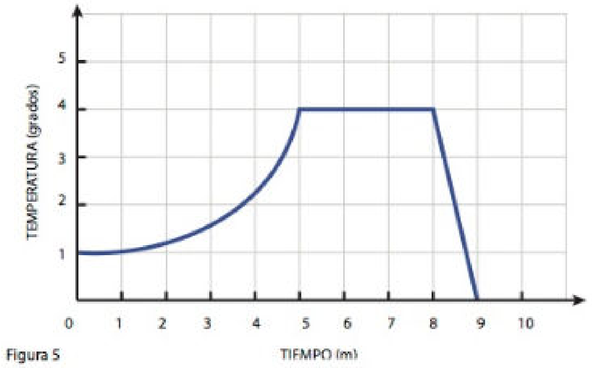


Figura 5

   a) ¿Por qué la gráfica comienza con el punto (0, 1)?
   b) ¿Cómo es el cambio de temperatura en los primeros cinco segundos? ______________
   c) ¿Qué tipo de relación se tiene en los primeros cinco segundos? ______________
   d) ¿Qué pasó entre el quinto y octavo segundo?, ¿cómo se explica este comportamiento físicamente?
   e) ¿Cómo fue su comportamiento en los últimos segundos? ______________
   f) ¿Qué temperatura alcanzó en el segundo 9?

5. En las Figuras 6 y 7, se muestran dos tipos de recipientes y a lado de ellos un plano cartesiano. Dibujen las gráficas que corresponden a la relación entre el porcentaje de capacidad del recipiente y la altura de llenado.

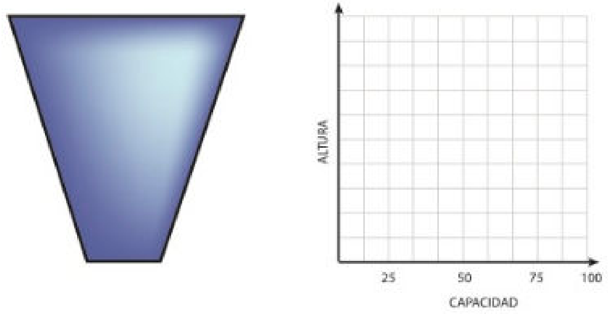


Figura 6

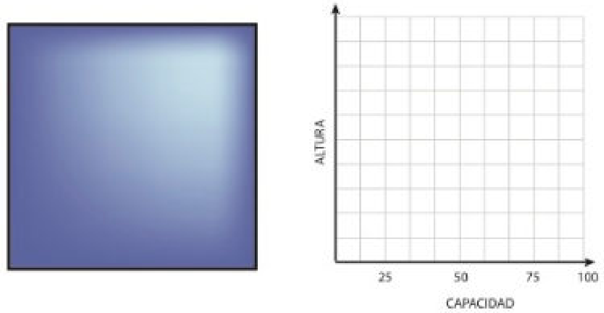


Figura 7

   a) ¿Qué diferencias hay entre cada gráfica?
   b) ¿Por qué consideran que sucede?
   c) Establezcan una expresión algebraica que modele a cada una de las gráficas.

Comparen sus respuestas y reflexiones con otros compañeros. De manera grupal expongan sus razonamientos para construir las gráficas de la actividad 5, comparen con las de sus compañeros y corrijan, si es necesario. Con ayuda de su profesor establezcan conclusiones y escríbanlas en el cuaderno.

AUTOEVALUACIÓN — Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Analicé e interpreté información referente a las situaciones, a partir de las gráficas presentadas.		
A partir de la gráfica, identifiqué la expresión algebraica que modela cada situación.		
Participé, de forma ordenada, en la discusión de observaciones y establecí conclusiones grupales.		

Vitaminas

Analiza las siguientes situaciones.

1. A continuación se muestra la gráfica de la velocidad de un carrusel de una feria, el tiempo esta medido en horas y la velocidad en km/h.
   a) ¿Cuánto tiempo dura el viaje?
   b) ¿Cuánto tiempo dura cada parada?
   c) ¿Cuál es la velocidad del carrusel?
   d) ¿En qué intervalos de tiempo acelera?
   e) ¿En qué momentos frena el carrusel?
   f) ¿Cada cuánto tiempo se pone en marcha el carrusel?

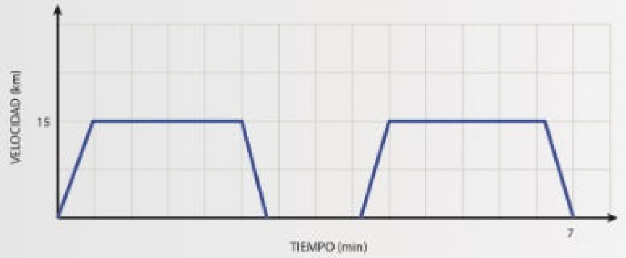


Figura 8

2. A continuación se muestran 3 gráficas, ¿cuál de ellas describe cómo varía el nivel del agua en la caja de un inodoro al jalarse la cadena?

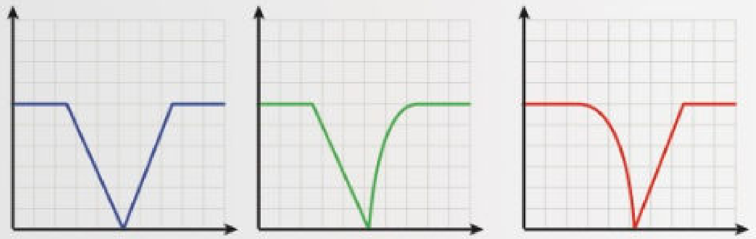


Figura 9

Con las gráficas restantes, plantea alguna situación que se adecúe a cada una de ellas.

Compara tus resultados con otros compañeros y verifiquen que sean correctos.

RDT

Revisa el material multimedia de la página electrónica http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/funciones/caracteristicas/llenado/actividad.html (última consulta: 11 de junio de 2013).
En ella podrás apoyar el desarrollo acerca de las características de la gráfica del llenado de recipientes. Comparte con tus compañeros tus experiencias al revisar el material multimedia del sitio. Expongan sus conclusiones en clase.

Para concluir

En parejas, analicen los siguientes desafíos.

1. Un ciclista recorre una distancia en determinado tiempo, la gráfica que describe esta situación se presenta en la Figura 10.
   a) ¿Qué tipos de relaciones se presentan en la gráfica?
   b) Describan en términos físicos el movimiento en los primeros cuatro segundos.
   c) Describan en términos físicos el movimiento en los últimos cinco segundos.
   d) ¿En qué tiempo se recorre una distancia de 4.5 m?
   e) ¿Cuál es la distancia que recorre en 5 s?
   f) Completen la gráfica desde el segundo 10 hasta el segundo 15, bajo la suposición de que en esos cinco segundos el ciclista se detuvo.
   g) Con base en la gráfica mostrada, bosquejen la gráfica de la velocidad que tiene en esos lapsos de tiempo, describiendo para cada uno la situación física del ciclista.

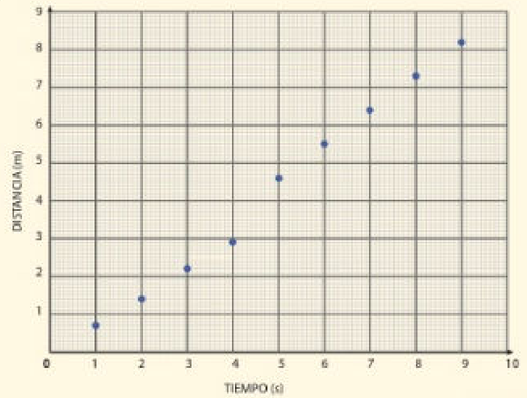


Figura 10

2. Un cronista está describiendo una carrera de atletismo; en determinado momento narra lo siguiente:
   "La carrera olímpica es cardiaca, muchos tropiezos y obstáculos para todos los corredores, poniendo el alma y la sangre en la pista. El corredor de Filipinas salió muy rápido, pero poco a poco perdió energía y fuerza, llegó casi andando para quedar en tercer sitio. El corredor ruso, su estrategia fue mantener una velocidad constante durante los primeros 50 metros y de ahí, aumentarla para llegar a la meta. El corredor de Estados Unidos salió demasiado rápido, pero en un obstáculo tropezó, sufriendo una pequeña luxación, se recuperó y siguió, pero muy lento, llegando en último lugar. El corredor mexicano salió lento, pero mientras transcurría la carrera aumentó su rapidez llegando en primer lugar."

Bosquejen las gráficas de distancia contra tiempo y de velocidad contra tiempo de cada uno de los competidores. Comparen sus diseños con los de otros compañeros. Justifiquen la forma de sus gráficas y los razonamientos en los que se basaron. Soliciten el apoyo de su profesor para establecer conclusiones.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre el uso y análisis de gráficas para describir situaciones de la vida real para la resolución de diversos desafíos; así como las ventajas del uso de este tipo de procedimientos.

Lección 7 | Probabilidad de eventos independientes

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

Conexiones

En la lección 6 del bloque 1, analizaste las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes. Además, en el bloque anterior, calculaste probabilidades analizando el tipo de eventos que se presentaban. Todo este conocimiento será de mucha utilidad en la resolución de algunos planteamientos de esta lección.

Ventana

De forma individual analiza y resuelve la siguiente actividad.

1. Completa la Tabla 1 con los resultados que se obtienen al lanzar dos dados y observar el número de puntos que muestran sus caras.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)					
2					(2,5)	
3				(3,4)		
4			(4,3)			
5		(5,2)				
6						(6,6)

Tabla1

A partir de la Tabla 1, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos resultados en total tiene el espacio muestral?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas caras muestren números primos?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas caras muestren múltiplos de 3?
d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener el número 3 en ambas caras?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas caras presenten el mismo número?
f) ¿Qué es más probable, obtener en ambas caras números pares o primos? Justifica tu respuesta.
g) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 10?
h) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 12? ¿Cómo es esta probabilidad? Justifica tu respuesta.
i) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 15? Justifica tu respuesta.

Compara tus resultados con los de otros compañeros y comenten sus reflexiones sobre el cálculo de probabilidades y el tipo de eventos presentados.

:: | Manos a la obra

Reúnanse en parejas y analicen las siguientes situaciones.

1. Se realizan varios juegos de azar, uno de ellos es tirar varias veces un dado, el experimento consiste en anotar el número de puntos que se obtienen cada vez que se lanza el dado. A partir del análisis del experimento, realicen lo siguiente:
   a) Escriban el espacio muestral del experimento.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 6?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par?, ¿y un número impar? ¿Cómo son las probabilidades?
   d) Se ha tirado 40 veces el dado, en las últimas 10 tiradas ha caído la cara con el número 4, ¿es correcto pensar que es muy probable que salga 4 en el siguiente tiro? ¿Por qué?
   e) ¿Qué probabilidad hay de que en la siguiente tirada salga un número 4?

2. Consideren nuevamente el experimento de lanzar dos dados al mismo tiempo. Analicen el evento "Obtener un número 3 en ambas caras".
   a) Si en el primer dado ya ha salido un 3, ¿cuál es la probabilidad de que en el otro dado salga un 3?
   b) ¿El resultado de un dado influye en el otro? Justifiquen.
   c) Calculen por separado la probabilidad de que en cada dado salga un 3.
      - P (Obtener un 3 en el dado 1) = ____________
      - P (Obtener un 3 en el dado 2) = ____________
   d) A partir de los dos números anteriores, ¿cómo pueden llegar al resultado que obtuvieron anteriormente en la sección Ventana? Argumenten.
   e) Con base en estos razonamientos, ¿cuál es la probabilidad de que en ambas caras aparezca un número impar?
   f) Comparen con la respuesta que obtuvieron en la sección Ventana, ¿cómo son?
   g) ¿Qué pueden concluir?

Comparen sus respuestas y reflexiones con las de sus compañeros. De manera grupal, con el apoyo y guía de su profesor establezcan conclusiones y escríbanlas en su cuaderno.

Herramientas

Se dice que dos eventos son **independientes** cuando la ocurrencia de uno no depende de la ocurrencia del otro.
Así, la probabilidad de dos eventos independientes satisface la regla del producto, es decir:
Sean A y B dos eventos independientes, entonces la probabilidad de que ocurra A y B es:

$$P(A \text{ y } B) = P(A)P(B)$$

En equipo, analicen y resuelvan las siguientes situaciones.

3. En tres urnas que se emplearán para un sorteo, se tienen bolas de distintos colores con la distribución que se muestra en la Tabla 2.

No. de Urna	Bolas blancas	Bolas azules	Bolas rojas	Total
1	2	4	10	16
2	3	5	2	10
3	4	7	9	20

Tabla 2

a) Con la información dada completen la Tabla 3.

No. de Urna	Probabilidad de sacar una bola blanca	Probabilidad de sacar una bola azul	Probabilidad de sacar una bola roja
1			
2			
3			

Tabla 3

RDT

Visita la siguiente dirección electrónica: http://www.hdt.gob.mx/new_media/secundaria_2/matematicas_b4/oda_5235_0/recurso/ (última consulta: 11 de noviembre de 2013). Analiza cómo calcular la probabilidad de eventos independientes. Comparte con tus compañeros tus dudas y reflexiones.

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola blanca en la tercera urna, si ya se obtuvo bola blanca en las urnas 1 y 2?
c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener en las tres urnas una bola roja?
d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola azul, una roja, y una blanca de la primera, segunda y tercera urna, respectivamente?
e) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola roja en la tercera urna, si en la primera se obtuvo una roja y en la segunda una azul?
f) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola roja en la tercera urna, si en la primera urna se obtuvo una verde y en la segunda una roja?
g) ¿Cómo es cada evento entre sí? Expliquen su respuesta.

4. En la liguilla de futbol que se juega en la secundaria Lázaro Cárdenas se sabe que uno de los equipos tiene el 55% de probabilidades de ganar, un 25% de empatar y el 20% de perder. Si en la primera ronda, este equipo jugará dos partidos, determinen la probabilidad de que gane el primer juego y empate el segundo.

a) Completen el diagrama de la Figura 1 con todos los posibles resultados en los dos partidos.

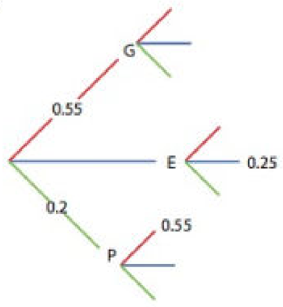


Figura 1

b) ¿Cuál es el espacio muestral? Escríbanlo.
E: ______
c) ¿El resultado del primer partido depende del resultado del segundo o viceversa? Expliquen.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que gane el primer partido y empate el segundo?
e) Si se desea saber cuál es la probabilidad de que el equipo gane al menos uno de los partidos, ¿cómo pueden resolverlo?
f) Si decir que gane al menos uno de los partidos equivale a decir que gane el primero o que gane el segundo partido, ¿cuáles de los resultados en el diagrama son favorables?
g) ¿Qué tipo de eventos representa esta situación?
h) Entonces, ¿cuál es la probabilidad de que el equipo gane, al menos, un partido?
i) A partir de los razonamientos anteriores calculen lo siguiente:
•La probabilidad de que se gane el segundo partido. ______
•La probabilidad de que gane los dos partidos. ______

j) Si de otro equipo se sabe que la probabilidad de ganar su primer partido es de 60%, de ganar el segundo partido es 15% y de ganar el tercer partido es 25%, analicen el siguiente razonamiento:
"Si tenemos 60%, 15% y 25% de ganar los primeros tres partidos, respectivamente, entonces tendremos el 100% de probabilidad de ganar todos los partidos".
¿La afirmación anterior es correcta? ¿Por qué?
k) Comparen sus análisis y respuestas con las de sus compañeros.

5. Una universidad tiene una población de 1 500 alumnos. Se sabe que 850 estudian alguna licenciatura y 650 alguna ingeniería. De los estudiantes de ingeniería, 350 son mujeres; en tanto que 600 mujeres son la que estudian alguna licenciatura.
a) A partir de la información completen los datos que faltan en la Tabla 4.

Género/Carrera	Licenciatura	Ingeniería	Total
Mujer		350	
Hombre		300	
Total	850	650	1500

Tabla 4

Si se escoge al azar a un estudiante, contesten:
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante sea de ingeniería?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante sea hombre?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y estudie ingeniería?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y estudie ingeniería?
f) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y estudie licenciatura?
g) ¿Estas situaciones describen eventos independientes? Justifiquen su respuesta.

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y comenten los procedimientos que llevaron a cabo para resolver cada una de las situaciones anteriores. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Calculé la probabilidad, de cada desafío presentado, utilizando la regla del producto.		
Identifiqué en cada desafío la presencia de eventos independientes para la utilización de la regla del producto.		
Expresé mis reflexiones acerca de la resolución de este tipo de desafíos utilizando los procedimientos adecuados en cada caso.		

AUTOEVALUACIÓN

Vitaminas

Analiza las siguiente situaciones.

1. Menciona tres ejemplos de eventos independientes.

2. Una caja contiene seis billetes de $ 500, tres de $50 y uno de $100.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos billetes de $500?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un billete de $50 y uno de $100?
   c) ¿Qué es más probable, obtener dos billetes de $200 o dos billetes de $100? Justifica tu respuesta.
   d) ¿Cuál de las situaciones anteriores representa eventos independientes? Argumenta.

3. Una ruleta tiene números del 1 al 10, mientras que una segunda ruleta tiene números del 1 al 4
   a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 4 en la primera ruleta?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 4 en la segunda ruleta?
   c) ¿Cuál es la probabilidad que en ambas se obtenga un 4?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3 en la primera y un 2 en la segunda ruleta?
   e) Explica cómo son los eventos de cada inciso.

Comparte con tus compañeros los procedimientos que seguiste para calcular probabilidad de cada desafío presentado. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Para concluir

En parejas, analicen los siguientes desafíos.

1. Una fábrica de alfileres logra una producción con solamente el 1% de alfileres defectuosos en cualquier muestra. Tomando sólo dos alfileres aleatoriamente, realicen lo siguiente:
   a) Elaboren en su cuaderno un diagrama de árbol para analizar los posibles resultados.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos alfileres defectuosos?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un alfiler defectuoso y uno bueno?, ¿y de obtener uno bueno y uno defectuoso? ¿Cómo son las probabilidades? Justifiquen su respuesta.
   d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos alfileres en buen estado?
   e) ¿Cuál es la suma de todas las probabilidades calculadas? Justifiquen su respuesta.

2. En un laboratorio se fabrica un antibiótico A cuya efectividad es del 60%, mientras que la competencia trabaja en otro antibiótico B, el cual tiene una efectividad del 70%. El organismo de control de calidad saca a la venta ambos productos diciendo que son igual de efectivos para erradicar la enfermedad para la que fueron diseñados.
   a) Un persona afirma los siguiente: "Es necesario utilizar ambos antibióticos en un enfermo ya que su efectividad será del 130%". ¿Cómo es que obtuvo ese resultado?
   b) ¿Es cierto la afirmación? Justifiquen su respuesta.
   c) ¿Cuál sería la efectividad de curar a un paciente si se usa primero el antibiótico A y luego el B? Argumenten.
   d) ¿Cuál es la efectividad de curar a un paciente si ahora se usa primero el antibiótico B y luego el antibiótico A?, ¿cómo es la probabilidad con respecto a la que calculaste en el inciso anterior? Justifiquen.
   e) ¿Cuál es la probabilidad de que el antibiótico A no erradique la enfermedad?
   f) ¿Cuál es la probabilidad de que el antibiótico B no erradique la enfermedad?
   g) ¿Cuál sería la probabilidad de que ambos antibióticos fallen en un paciente?
   h) ¿Cuál sería la probabilidad de erradicación de la enfermedad si se mejora el primer antibiótico al 68% y el otro permanece igual?
   i) ¿Cuál será la probabilidad de erradicar la enfermedad si ambos antibióticos mejoran su efectividad 68% y 75% respectivamente?

Discutan entre ustedes los procedimientos que llevaron a cabo para solucionar los desafíos planteados. Soliciten el apoyo de su profesor en caso de dudas o dificultades.

RDT

Visita la siguiente dirección electrónica: http://www.hdt.gob.mx/new_media/secundaria_2/matematicas_b4/oda_5236_0/recurso/ (última consulta: 11 de noviembre de 2013). Realiza los ejercicios que se proponen argumentando tus respuestas. En caso de dudas acude a tu profesor para resolverlas.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre el análisis de eventos independientes y la obtención de la regla del producto para calcular su probabilidad.

____
____
____
____
____

Primera parte

Resuelve y describe los procedimientos necesarios para resolver los siguientes problemas:

Los terrenos

1. Un terreno para sembradío se divide como se muestra en la Figura 1. La parte derecha se utilizará para sembrar maíz y la otra para sembrar frijol.

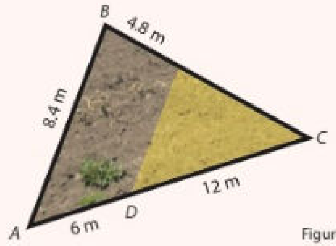


Figura 1

   a) Calcula cuánto miden los lados ED y EC.
   b) ¿Cuál es el perímetro de los triángulos?
   c) Si desean cercar el terreno, ¿cuántos metros de malla se necesitarán?
   d) Se tiene otro terreno en dividido en dos secciones como se muestra en la Figura 2. Calcula el perímetro del cuadrilátero $BCDE$ y el área del triángulo rectángulo ABC. Subraya la respuesta correcta.

      I. P = 63 cm; A = 394 cm^2
      II. P = 39 cm; A = 108.375 cm^2
      III. P = 78 cm; A = 216.75 cm^2
      IV. P = 18.75 cm; A = 394 cm^2

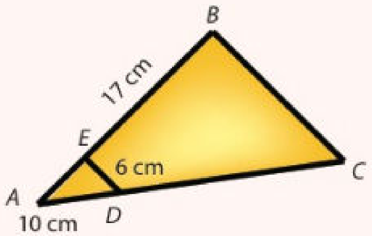


Figura 2

Las urnas

2. Se tienen dos urnas, la primera urna contiene tres esferas marcadas con las letras a, b y c; en la segunda urna hay dos esferas, marcadas con las letras a y b.

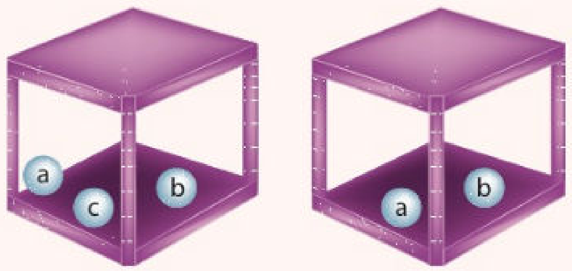


Figura 3

   a) El evento de extraer una a en ambas urnas, ¿se compone de eventos independientes? Justifica tu respuesta.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer de ambas la letra a?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de extraer a y c de cada urna?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener a o b, de ambas urnas?

Segunda parte

De las respuestas que se proponen escoge la opción correcta y márcala con una ✓.

1. En un zoológico se realiza una revisión veterinaria a una pareja de chimpancés, se encontró que el macho tiene $\frac{1}{5}$ de probabilidad de vivir 10 años más y la hembra de $\frac{1}{3}$ de vivir 10 años más, ¿cuál es la probabilidad de que ambos vivan más de 10 años?
   a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{1}{15}$ c) $\frac{2}{15}$ d) $\frac{1}{8}$

2. La distancia que recorre un automóvil en la ciudad de Monterrey está dada por la expresión algebraica $d = 4t^2 - 11t + 47$, donde t se mide en segundos y d en metros, ¿en qué tiempo habrá recorrido 50 m?
   a) $\frac{1}{4}$ s b) 12 s c) 4 s d) 3 s

3. En la Figura 4 se muestra la construcción homotética de un cuadrado. Si se sabe que el cuadrado resultante es dos veces el área del cuadrado original, encuentra la razón de homotecia.
   a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) 4 d) $\frac{1}{4}$

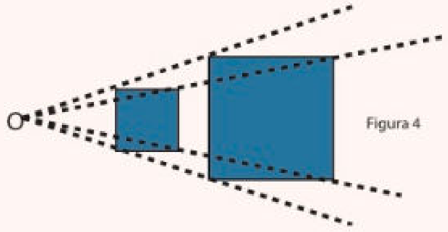


Figura 4

4. ¿Cuál de las gráficas, de la Figura 5, corresponde a la siguiente situación: "Luis sale de su casa al supermercado, camina durante tres horas, entra a una tienda de videojuegos, permanece ahí una hora y de regreso a su casa toma el autobús"?

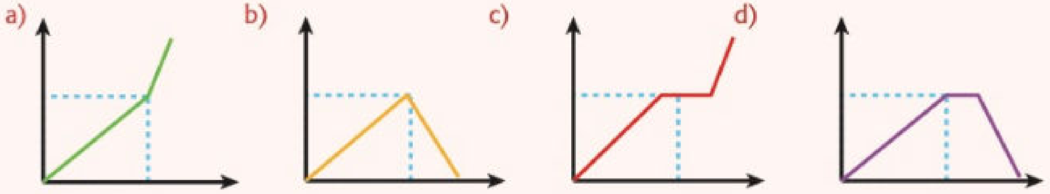


Figura 5

EVALUACIÓN

Solicita a tu profesor que evalúe tus aprendizajes esperados, proporcionándote indicaciones y sugerencias para mejorar.	Incipiente	En desarrollo	Logrado
Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.			
Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.			
Sugerencias:			

BLOQUE 4

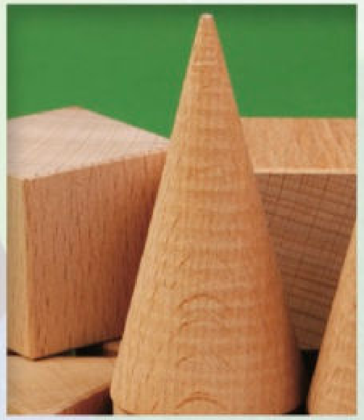
Aprendizajes esperados

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

		CONTENIDOS	DOSIFICACIÓN BIMESTRAL
LECCIÓN 1	Sucesiones cuadráticas	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	
LECCIÓN 2	Sólidos de revolución	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	
LECCIÓN 3	Relación entre la pendiente y el ángulo de una recta	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	
LECCIÓN 4	Cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo	Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	
LECCIÓN 5	Razones trigonométricas	Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	
LECCIÓN 6	Razón de cambio	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	
LECCIÓN 7	Medidas de dispersión de datos	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	

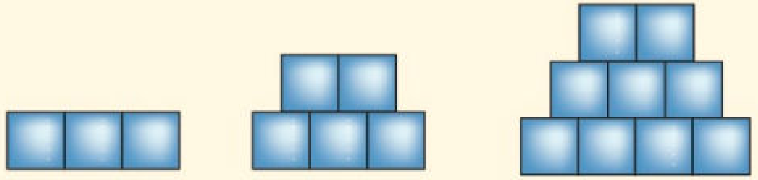


Lección 1 | Sucesiones cuadráticas

Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

Ventana

1. Formen equipos de 4 personas y examinen la siguiente sucesión de figuras.



Posición 1 Posición 2 Posición 3

Figura 1

a) Dibujen en su cuaderno el arreglo de cuadrados de la siguiente posición.
b) ¿Cuántos bloques tendrá la posición 8? ______
c) Completen la Tabla 1 con los datos que se solicitan.

Posición	Número de bloques
1	3
2	6
9	
10	
25	

Tabla1

d) Analicen los datos de la Tabla 1 y describan cuál es la regla general que sigue la sucesión anterior. ______

e) Escriban la expresión algebraica que representa dicha regla. ______
f) Comparen sus respuestas con las de otros equipos y discutan si es posible encontrar expresiones algebraicas diferentes que indique el patrón que siguen las figuras.

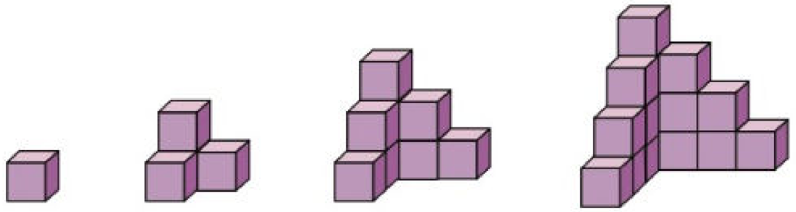
De manera grupal, reflexionen acerca de la utilidad de conocer la expresión algebraica de la regla general que rige a una sucesión.

Conexiones

En el bloque 4 de segundo año de secundaria, resolviste problemas de sucesiones aritméticas de números enteros, es importante que revises tus apuntes, ya que esos conocimientos te serán de utilidad.

:: | Manos a la obra

1. Trabaja con otro compañero y reúnan varios cubos del mismo tamaño, los pueden construir con cartón o conseguir algunos dados. Acomoden los cubos de manera que formen los siguientes arreglos.



Posición 1 Posición 2 Posición 3 Posición 4

Figura 2

a) ¿Cuántos cubos emplearon para formar cada arreglo? ______
b) ¿Cuántos cubos necesitan para el arreglo de la posición 5? ______
c) Si continúan la sucesión, ¿cuántos cubos tendrá la posición 11? ______
d) ¿Y la posición 50? ______
e) ¿Cómo va aumentando el número de cubos en cada arreglo?
f) ¿Qué relación hay entre el número de cubos de cada arreglo y la posición de cada uno?
g) ¿Cuántos cubos tendrá la posición n? ______

Comparen con otras parejas cómo construyeron la sucesión de figuras y el patrón que identificaron en ella. Acudan a su profesor en caso de dificultades.

2. Continúen trabajando en parejas y analicen la sucesión de la Figura 3. Representen los arreglos de cuentas utilizando bolitas de papel o algún material escolar de forma pequeña.

Posición 1 Posición 2 Posición 3 Posición 4

Figura 3

a) ¿Cuántas cuentas necesitan para representar el arreglo de la posición 5 o 7?
b) Completen la Tabla 2 con el número de cuentas que forman cada arreglo.

Posición	1	2	3	4	5	6
Número de cuentas						

Tabla2

c) Con los datos de la Tabla 2, indiquen cómo varía el número de cuentas de cada arreglo.
d) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la regla que sigue esta sucesión?
e) ¿Un arreglo con 96 cuentas forma parte de la sucesión? ¿Por qué?

f) ¿Cuántas cuentas tiene el arreglo de la posición 125?
g) ¿Qué posición ocupa un arreglo formado con 1 152 cuentas?

Discutan con el resto de la clase cómo obtuvieron la expresión algebraica de la sucesión. Comparen la forma de la expresión con la obtenida en la actividad 1 de la sección Ventana, identifiquen diferencias y similitudes. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

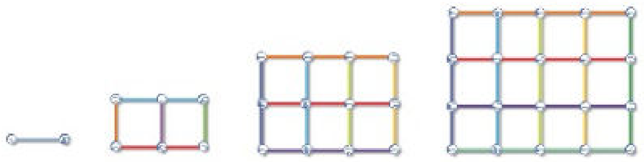
RDT

Visita la siguiente dirección electrónica: http://www.hdt.gob.mx/GuiaSecundaria/guia/odas/SA3_MA_B4_OA_10066/index.html (última consulta: 12 de noviembre de 2013).
Resuelve los ejercicios del recurso digital interactivo y comparte con tus compañeros tus resultados para reafirmar los conocimientos.

Reúnanse en equipos y analicen las siguientes sucesiones.

3. Observen el número de puntos en cada arreglo. Si lo desean, pueden armar los arreglos con sus lápices o bolígrafos.

Figura 4

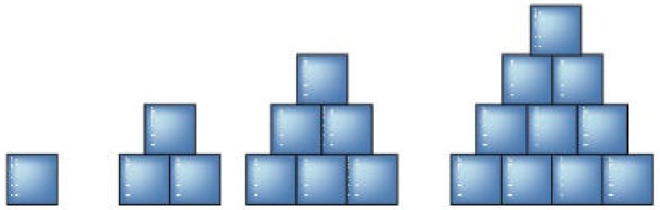


Posición 1 Posición 2 Posición 3 Posición 4

a) ¿Cómo va aumentando el número de puntos en cada posición?
b) ¿Cuántos puntos tendrán, respectivamente, las posiciones 5, 7 y 10?
c) ¿Cómo se relacionan el número de puntos horizontales y verticales de los extremos?
d) ¿Cuál es la expresión algebraica que determina el número de puntos de cada posición? ______________________
e) Describan el número de puntos y la disposición del arreglo que se encuentra en la posición 25.

4. Analicen los siguientes bloques que forman parte de una sucesión.

Figura 5



Posición 1 Posición 2 Posición 3 Posición 4

a) Dibujen la posición 5, ¿cuántos bloques tiene?
b) ¿Qué relación hay entre el número de bloques y la base de cada posición?
c) ¿Cuántos bloques hay en cada posición?
d) ¿Cómo será la posición 11?
e) ¿Cómo podrían saber cuántos bloques tendrá la posición 50?
f) ¿Qué expresión algebraica permite calcular los bloques de cada posición?
g) ¿Qué tipo de expresión algebraica es la anterior?

h) Comprueben la expresión algebraica encontrada para las posiciones 1 a la 5.
i) ¿Cuántos bloques tendrá la posición 100 y 1 000?

5. Copien la Tabla 3 en su cuaderno y complétenla con los datos de los primeros doce términos de la sucesión anterior.

Posición	1	2	3	4	5	6
Número de bloques	1	3	6	10		
Primeras diferencias						
Segundas diferencias						

Tabla3

a) Escriban en la tercera fila el resultado de restar dos términos consecutivos de la sucesión.
b) Completen la cuarta fila con los números que se obtienen al restar dos términos consecutivos de la fila anterior.
c) ¿Cómo son los números de la cuarta fila?
d) ¿Cómo se relacionan entre sí los números de la tercera fila?
e) Repitan el análisis con las sucesiones de las actividades 1, 2 y 3 de la sección Manos a la obra. ¿Qué observan?
f) ¿Qué pueden concluir al respecto?

Comparen con otros compañeros sus respuestas. Con ayuda de su profesor, en una discusión grupal compartan sus observaciones sobre el tipo de ecuaciones estudiadas. Al terminar, escriban las conclusiones en el cuaderno.

AUTOEVALUACIÓN

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Analicé los patrones que siguen los términos de las sucesiones.		
Expresé procedimientos para obtener la regla general de cada sucesión.		
Construí expresiones algebraicas cuadráticas para definir cualquier término de una sucesión.		
Identifiqué las características de los términos de una sucesión cuadrática.		

Herramientas

Cuando en una sucesión se tienen términos constantes al calcular las primeras diferencias de dos términos consecutivos, se trata de una **sucesión aritmética.** Si se obtienen términos constantes hasta las segundas diferencias se dice que la sucesión en cuestión es **cuadrática**, ya que es generada por una expresión de la forma:

$$an^2 + bn + c$$

Donde n representa la posición de un término de la sucesión y los coeficientes a, b y c se relacionan de la siguiente manera:
$2a$ = Constante de segundas diferencias.
$3a + b$ = Primer término de sucesión de primeras diferencias.
$a + b + c$ = Primer término de sucesión original.

6. En parejas diseñen diferentes sucesiones aritméticas y cuadráticas, si es posible utilicen algún recurso gráfico para representarlas. Compártanlas con otras parejas y soliciten que obtengan la regla general que las define, así como su expresión algebraica. ¿Encontraron expresiones algebraicas diferentes a las de ustedes? Si es el caso, verifiquen que se trata de expresiones algebraicas equivalentes.

Al finalizar, anoten su experiencia de resolver sucesiones hechas por sus compañeros y también qué dificultades tuvieron ustedes y ellos para resolverlas.

Vitaminas

Resuelve las siguientes actividades.

1. Un jardinero decide plantar árboles de limón siguiendo un patrón; pero para que se protejan, decide ponerles una cerca de palos de madera, la sucesión de la Figura 6 esquematiza la situación.

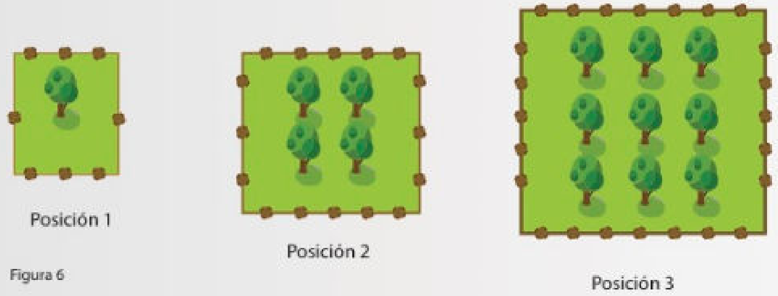


Figura 6

a) ¿Qué patrón siguen las cercas de palos de madera?
b) Escribe la expresión algebraica para el patrón.
c) ¿Qué patrón siguen los árboles? Escribe su expresión algebraica.
d) Si se quiere plantar 12 árboles, ¿cuántos palos de madera se necesitan para hacer la cerca y protegerlos?
e) Con 48 palos de madera, ¿cuántos árboles podría proteger?

2. Si el jardinero decide plantar 2 árboles en lugar de 1 en el jardín 1, plantar 3 árboles en el jardín 2, plantar 10 árboles en el jardín 3 y 23 en el siguiente, ¿qué expresión algebraica representa esta nueva sucesión? En este caso, ¿cuantos árboles tendría el jardín 5?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros. En caso de dudas, consulten a su profesor.

Para concluir

Reúnanse en equipos de 4 personas para resolver la siguiente actividad.

1. La Figura 7 muestra una torre de cubos.

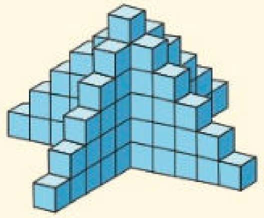


Figura 7

a) Analicen cuántos cubos hay en cada nivel comenzando por la parte superior.
b) ¿Cuántos cubos se necesitan para incluir el nivel 7 en la torre? ______
c) Determinen la expresión algebraica de la sucesión y verifiquen que se cumple para cada nivel. ______
d) ¿Puede haber más de una expresión para la figura presentada? Expliquen.

2. Los triángulos de la Figura 8 corresponden a los primeros tres términos de una sucesión cuadrática.

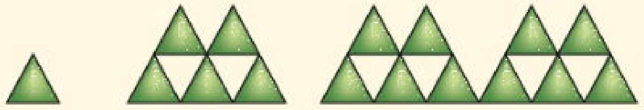


Figura 8

a) Identifiquen la regularidad que define el número de triángulos y la expresión algebraica que la representa. ______

Comparen sus expresiones algebraicas con las de otros equipos y expliquen cómo consiguieron resolver cada sucesión. Verifiquen que las expresiones algebraicas correspondan a cada sucesión. Soliciten la ayuda de su profesor en caso de tener dificultades.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre la obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

______

______

Lección 2 | Sólidos de revolución

Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

Conexiones
En lecciones pasadas y grados anteriores analizaste características de figuras geométricas tales como cuadrados, triángulos, rectángulos, polígonos regulares y circunferencias. Es importante retomar estos conocimientos para continuar el estudio de cuerpos con volumen.

Ventana

En parejas analicen la siguiente situación.

1. Un tablero de damas chinas tiene el diseño que se muestra en la Figura 1.

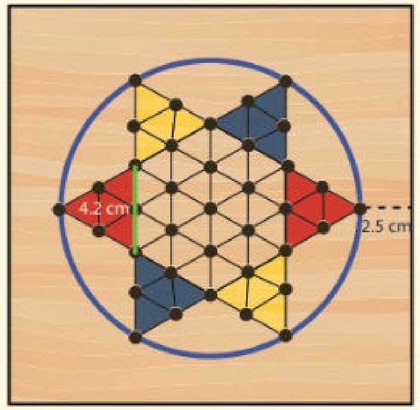


Figura 1

El cuadrado de madera tiene un área de 441 cm^2 y hay una distancia de 2.5 cm entre la circunferencia y los lados del cuadrado.

a) Calculen las dimensiones del cuadrado y de la circunferencia.
b) ¿Cuál es el área del círculo que delimita la circunferencia? ____________
c) ¿Qué tipo de triángulos hay en el tablero? ____________
d) ¿Qué superficie del tablero está pintada de color rojo? ____________

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Expliquen la manera de cómo obtuvieron las dimensiones de las figuras del tablero. Acudan a su profesor en caso de dudas.

:: | Manos a la obra

1. De forma individual, realiza la siguiente actividad. Para ello, necesitarás un trozo de cartulina y estambre o hilo.
   a) Recorta un rectángulo en un trozo de cartulina, o bien dobla y pega una hoja de tu cuaderno por la mitad.

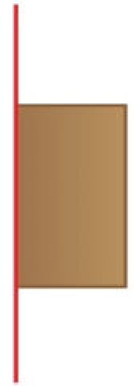


Figura 2

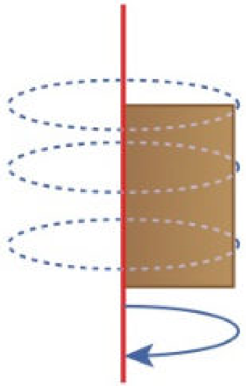


Figura 3

b) Pega uno de los lados del rectángulo en un trozo de hilo o estambre de modo que en cada extremo del rectángulo queden libres al menos 10 cm, como se muestra en la Figura 2.
c) Sujeta los extremos del hilo, cada uno con una mano, y gira el hilo varias veces hasta que esté completamente enrollado en los extremos.
d) Separa las manos para tensar el hilo y observa girar el rectángulo. Su movimiento será parecido al de la Figura 3.
e) Dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico que observas que se genera.
f) Repite la actividad, si es necesario, para que analices las características del cuerpo.
g) Describe las características del cuerpo:
   - ¿Cuál es su altura? ____________
   - ¿Cómo es la forma de su base? ____________
   - ¿Cuántas caras planas tiene? ____________
h) Si pegaras el hilo en cualquiera de los otros lados del rectángulo, ¿cómo sería el cuerpo generado?

Compara con tus compañeros tu dibujo y la descripción del cuerpo generado, en caso de no coincidir verifiquen la razón y corrijan con ayuda de su profesor.

Reúnete con un compañero para trabajar las siguientes actividades.

2. Tracen en una cartulina un triángulo rectángulo como el de la Figura 4.

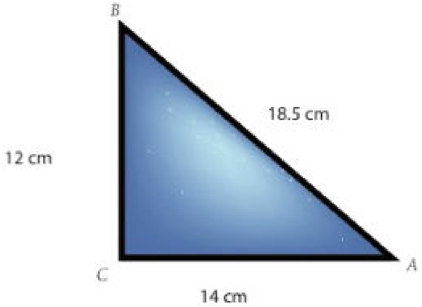


Figura 4

a) Peguen el triángulo por uno de sus catetos, en un trozo de estambre, como hicieron en la actividad anterior.
b) Si se hace girar el triángulo tomando como eje el cateto, ¿qué figura tridimensional se genera?
c) ¿Qué representaría en la nueva figura el cateto AC?
d) ¿Qué nombre recibirá en la nueva figura el segmento AB?
e) ¿Cuál será la altura de la nueva figura?
f) ¿Qué otras características tiene el sólido generado?
g) Si se toma como eje de giro cualquiera de los otros dos lados del triángulo, ¿se generará el mismo sólido? Expliquen.

Glosario

sólido. En geometría, es una figura tridimensional con volumen.

3. Analicen la Figura 5.

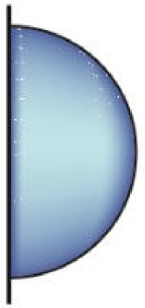


Figura 5

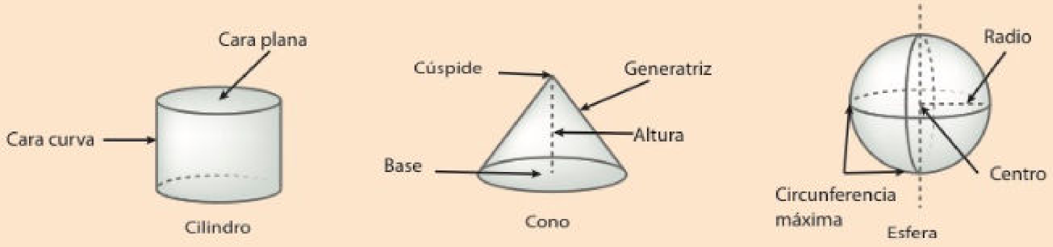
a) ¿De qué figura se trata?
b) Anticipen qué sólido se generará si rotan la Figura 5 respecto al eje mostrado.
c) ¿Qué características de la Figura 5 se conservan en el sólido resultante?

Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Expliquen las características de los sólidos generados y complementen sus observaciones con las de sus compañeros. Soliciten el apoyo de su profesor si se presentan dudas o errores.

Al terminar, analicen de manera grupal la información de la sección Herramientas y discutan por qué a estos cuerpos geométricos se les conoce como sólidos de revolución.

Herramientas

Algunos de los cuerpos geométricos tridimensionales conocidos como **sólidos de revolución** son el **cilindro**, el **cono** y la **esfera**.



Trabaja de manera individual para resolver las siguientes situaciones.

4. Consigue una moneda, no importa la denominación, y gírala sobre una superficie plana como se muestra en la Figura 6.

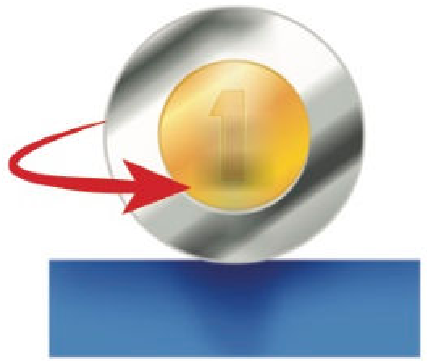


Figura 6

RDT

En la siguiente dirección electrónica, puedes observar un recurso digital interactivo que te permitirá reafirmar tus conocimientos: http://www.hdt.gob.mx/new_media/telesecundaria_3/matematicas_b5/oda_3221_0/recurso/ (última consulta: 12 de noviembre de 2013). Consulta a tu profesor en caso de dudas.

a) Supongamos que la moneda en lugar de hacer un recorrido se queda en un solo lugar girando, ¿identificaste qué sólido se ha generado? Descríbelo.
b) Si no es así, simula el movimiento en cámara lenta, con la moneda parada y girándola en un mismo eje central.

5. Ahora toma la moneda de forma que su cara sea paralela a la superficie plana y a una distancia aproximadamente de 3 cm de la misma, como se muestra en la Figura 7.

Figura 7

a) ¿Qué sólido se genera si se deja caer la moneda?
b) Toma nuevamente la moneda y muévela lentamente siguiendo una línea recta perpendicular a sus caras para repetir la trayectoria que sigue cuando se deja caer. Repite este movimiento para varias alturas.
c) ¿Cómo cambia el sólido si la moneda se ubica a una mayor o menor altura?
d) ¿Y si cambias el tamaño de la moneda?

Compara tus observaciones con las de otros compañeros. Escribe tus conclusiones en tu cuaderno.

Vitaminas

En parejas resuelvan lo que se plantea.

1. Se hace girar un triángulo como el de la Figura 8, el cono que se genera tiene las siguientes características: altura 7 cm y generatriz 8 cm.
   a) ¿Cuáles son las dimensiones del triángulo? Indíquenlas en el dibujo, así como el eje de giro.

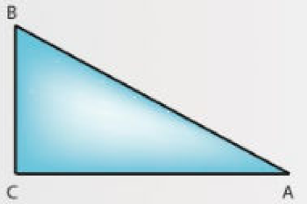


Figura 8

2. Si se desea aumentar al doble el tamaño de una esfera con diámetro de 15 cm, ¿cuáles deberán ser las dimensiones de la nueva figura?

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

¿Sabías que..?

Los sólidos de revolución se pueden encontrar en varios objetos que utilizas en la vida diaria.

Organizados en equipos, realicen la siguiente actividad.

6. Consigan un cilindro, por ejemplo un rollo de papel higiénico, y marquen la orilla de la base del rollo en una hoja de su cuaderno. De la circunferencia que obtuvieron, midan su perímetro y anótenlo en su cuaderno. Ahora tracen una línea en el rollo como se muestra en la Figura 9.

Figura 9

Recorten por la línea, extiendan el rollo y contesten:

a) ¿Qué figura obtuvieron?
b) ¿Cuáles son las dimensiones de la figura que obtuvieron?
c) ¿Cómo se relacionan la figura anterior y la circunferencia que trazaron previamente?
d) Si la circunferencia del rollo aumenta de radio 1 cm, ¿cómo serán las dimensiones de la figura que se generará al extender el rollo, si éste conserva la altura original?

7. Analicen en la Figura 10 el cono que se forma a partir del triángulo rectángulo.

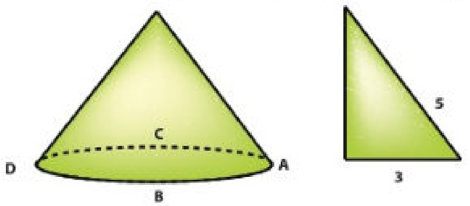


Figura 10

a) ¿Cuál es la altura del cono?
b) ¿Qué figura forma la base del cono?
c) Calculen el perímetro de la base del cono.
d) ¿Cuál es la distancia que hay del punto A de la base a la cúspide del cono?
e) ¿Cuál es la distancia que hay del punto B de la base a la cúspide del cono?
f) ¿Y del punto C qué distancia existe hasta la cúspide del cono?
g) Supongan que pueden extender el cono, ¿qué figura plana obtienen? Dibújenlo en su cuaderno. Si tienen dudas sobre la figura, consigan, por ejemplo, un cono de papel para tomar agua y realicen el ejercicio.
h) Indiquen en el dibujo cuál es la generatriz.
i) ¿Cuál es la medida del ángulo del sector circular que pertenece a la forma de la base?

En tu biblioteca

Consulta el libro de Roser Codina Pascual, *Apuntes de matemáticas*. México: SEP/Parramón Ediciones (2007). En la sección de geometría de este libro, encontrarás múltiples aplicaciones de la geometría en la vida cotidiana, te sorprenderá saber ¡qué todo es geometría!

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Expliquen la relación que tienen las figuras con las que han trabajado y compartan sus observaciones con los compañeros. Anoten en su cuaderno las conclusiones, si tienen alguna duda soliciten el apoyo del profesor.

AUTOEVALUACIÓN

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Si	No
Identifiqué las características del desarrollo plano de un cilindro.		
Identifiqué qué características tiene el desarrollo plano de un cono.		
Analicé cómo se relaciona el desarrollo plano de un cono con el triángulo rectángulo que lo genera.		

Vitaminas

En parejas realicen las siguientes actividades.

1. Tracen en una cartulina un círculo de radio 9 cm. En el círculo marquen un ángulo central de 45°, recórtenlo siguiendo la línea de los radios.
   a) ¿Cuántos conos podrán armar con las piezas que tienen?
   b) Si cambian el ángulo central, ¿cambian los conos que podrían generar?
   c) ¿Qué medidas necesitarían para generar 5 conos?
   d) Calculen el radio de la base de cada cono.

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros.

Para concluir

Trabaja de manera individual para resolver las siguientes situaciones.

1. ¿Cuáles son las medidas que le corresponden a las líneas L, F, H de la Figura 11?

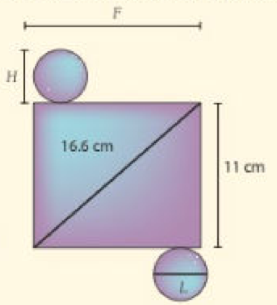


Figura 11

2. En una fábrica, el gerente desea hacer latas con las características que se muestran en la Figura 12.

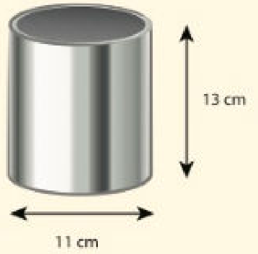


Figura 12

a) Traza el desarrollo plano del cilindro correspondiente para que tenga las mismas medidas que la lata.
b) Si se desea construir un cono que tenga las mismas medidas de radio y altura que el cilindro anterior, ¿cuáles deben ser las medidas del desarrollo plano correspondiente?

Compara tus respuestas y trazos con los de tus compañeros. Explica tu análisis de las figuras para obtener los desarrollos planos y verifica con tus compañeros que sean correctos. Acudan a su profesor en caso de dudas.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo, así como la construcción de desarrollos planos de conos y cilindros.

____
____
____
____

Lección 3 | Relación entre la pendiente y el ángulo de una recta

Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

Ventana

1. De manera individual analiza la gráfica de la Figura 1 y contesta lo que se te pide.

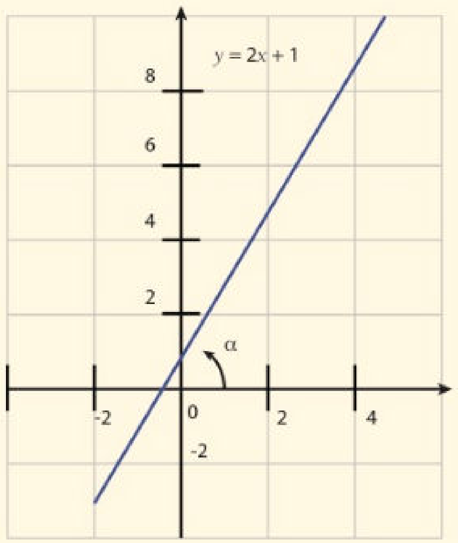


Figura 1

Conexiones

En el bloque 5 de segundo grado identificaste los parámetros de la función $y = mx + b$ y los efectos en la gráfica correspondiente al cambiar sus valores. Retoma esos contenidos ya que en esta lección continuará el análisis de características de funciones lineales.

a) Identifica el valor de la pendiente de la ecuación. ______________
b) ¿Cuál es la medida del ángulo de inclinación de la recta? ______________
c) Grafica en tu cuaderno o en una hoja milimétrica la función $y = \frac{1}{2}x + 1$.
d) Determina el valor de la pendiente y del ángulo, respecto al eje x, de la recta del inciso d.
e) ¿Qué relación tiene la pendiente con el ángulo? ______________
f) Si aumentas el valor del ángulo, ¿la pendiente cambia? Argumenta. ______________
____
g) Cambia el valor de la pendiente, de tal forma que sea mayor que 1, ¿qué tipo de ángulo es según su medida? ______________
Y si el valor de la pendiente es menor que 1, ¿cómo es el ángulo? ______________

Compara tus respuestas con las de otros compañeros de clase, discutan la relación que encontraron entre el valor de la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta. Acudan con su profesor en caso de dificultades.

:: Manos a la obra

1. Reúnanse en parejas y analicen la gráfica de la Figura 2.

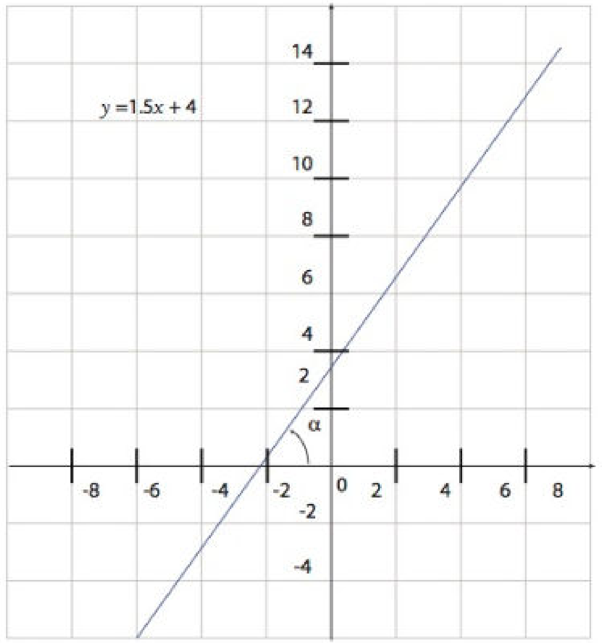


Figura 2

a) Determinen cuál es el valor el ángulo α, que la recta forma con el eje X.
b) Construyan cuatro triángulos rectángulos, formados entre la recta y el eje X o una paralela a este.
c) Identifiquen y midan los catetos opuestos y adyacentes al ángulo α de cada triángulo trazado.
d) Obtengan el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente de cada triángulo que construyeron.
e) ¿Cómo son entre sí los cocientes que obtuvieron? Expliquen.
f) ¿Qué relación hay entre la pendiente de la recta y los cocientes de los catetos?

En una hoja cuadriculada o milimétrica cambien el valor de la pendiente, en la ecuación $y = 1.5x + 4$, de tal manera que m sea mayor que cero pero menor que 1, construyan la gráfica de la nueva ecuación.

g) Describan cómo cambió la gráfica de la función.
h) Dibujen tres triángulos rectángulos con respecto al eje X o a alguna paralela a éste.
i) Identifiquen y calculen los catetos opuestos y adyacentes.
j) Identifiquen y calculen el valor del nuevo ángulo formado por el eje X y la recta.
 - ¿Cómo calcularon éste ángulo?
 - ¿Qué otros procedimientos podrían emplear para calcular el ángulo?

Comparen sus respuestas con las de otras parejas. De manera grupal, discutan acerca de la utilidad de trazar triángulos rectángulos bajo una recta, para establecer la relación entre el valor de la pendiente de una recta y el cociente de los catetos.

Herramientas

La razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente se llama **tangente**. Para saber cuál es la tangente de un ángulo, o al revés, para saber cuál es el valor de un ángulo dado el valor de la tangente, se utilizan tablas de funciones trigonométricas o una calculadora.

Continúen trabajando en parejas y realicen en la siguiente actividad.

2. ¿Cómo calcularon el ángulo de las actividades anteriores? Existen otras formas, tal vez, sean distintas a la que utilizaron antes. Necesitarán una calculadora científica o tablas trigonométricas.

Para encontrar, por ejemplo, la tangente del ángulo 25° se busca en las tablas el dato en la intersección de la fila del ángulo de 25° y la columna de tangente, como se muestra en la Figura 3, entonces la tangente de 25° es 0.466308, en forma abreviada se escribe tan 25° = 0.466308.

Ángulo	Tangente
24°	0.44529
25°	0.466308
26°	0.487733

Figura 3

a) Encuentra el ángulo α, tal que $\tan \alpha = 0.1943$
b) Encuentra el ángulo α, tal que $\tan \alpha = 0.8391$

Otra manera de encontrar los ángulos, es utilizando la calculadora.

Para calcular la tangente de un ángulo, se oprime la tecla Tan y después se escribe la medida del ángulo.
Por ejemplo, para calcular la tangente de 65°, se oprime la tecla Tan, enseguida se teclea el número 65 y por último se presiona =. En la pantalla aparecerá el valor 2.144506921, es común redondear para realizar cálculos.
Por otro lado, cuando se desea encontrar el valor del ángulo y se conoce la tangente (valor de la pendiente) se oprime la tecla SHIFT, después se oprime la tecla Tan y enseguida se anota el valor de la razón. Por ejemplo, para encontrar con la calculadora el valor del ángulo α, tal que $\tan \alpha = 1.191754$, se hace lo siguiente:
Se presiona la tecla SHIFT, enseguida se oprime la tecla Tan, se digita el número 1.191754 y por último se oprime =. En la pantalla aparecerá el valor 50.00000964, redondeando se puede considerar 50, por lo tanto, tan 50° = 1.191754.

c) Encuentren con la calculadora el valor del ángulo α tal que $\tan \alpha = 0.4567$.
d) Encuentren con la calculadora el valor de ángulo β tal que $\tan \beta = 1$.

Comparen sus respuestas con las de otras parejas y de manera grupal discutan acerca de la utilidad de las tablas trigonométricas y del uso de la calculadora.

3. Continúen trabajando en parejas y analicen la gráfica de la Figura 4.
 a) En la Tabla 1 anoten los datos que corresponden a la recta 1.
 b) Tracen, en el plano de la Figura 4, dos rectas con las siguientes características.
  - La recta 2 debe pasar por el origen del plano cartesiano, además el valor de su pendiente debe ser 1.2.
  - El ángulo de inclinación de la recta 3 con respecto al eje X debe ser 31°, además la recta debe cortar al eje X en el punto $x = 1.7$ y al eje Y en el punto $y = -1$.
 c) Obtengan las ecuaciones que definen a cada recta.

d) Analicen las rectas que trazaron y completen la Tabla 1. También escriban las ecuaciones que obtuvieron en el inciso b.

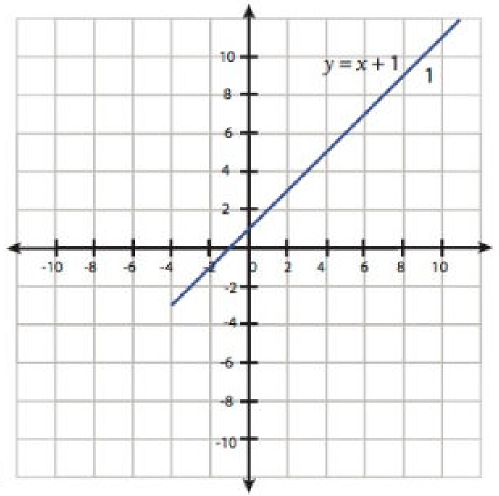


Figura 4

	Punto donde la Recta corta el eje Y	Punto donde la recta corta el eje X	Ángulo de inclinación	Tangente del ángulo
Recta 1				
Recta 2	0			1.2
Recta 3			31°	

Tabla1

Comparen sus respuestas con las de otras parejas, debatan y concluyan de qué diferentes maneras podrían completar la tabla, si tienen dudas o problemas para resolver, acérquense a su profesor para resolverlas.

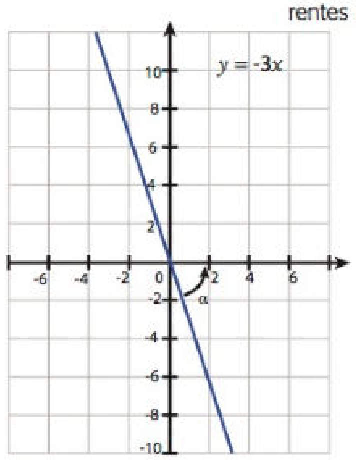


Figura 5

4. Continúen en parejas y analicen la gráfica de la Figura 5.
   a) Construyan dos triángulos rectángulos, formados entre la recta y el eje X o una paralela a éste.
   b) Identifiquen y midan los catetos opuestos y adyacentes al ángulo α de cada triángulo trazado.
      • ¿Qué características tienen los triángulos dibujados?
   c) Obtengan el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente de cada triángulo.
      • ¿Los cocientes obtenidos son iguales? Expliquen por qué consideran que sucede.
   d) Con una tabla de funciones trigonométricas, determinen el valor del ángulo α y el ángulo de inclinación de la hipotenusa de los triángulos rectángulos que ustedes trazaron.
   e) ¿Qué diferencia hay entre el ángulo α con respecto al ángulo de la hipotenusa de los triángulos rectángulos que ustedes construyeron?

   f) ¿Qué relación hay entre las hipotenusas? Discutan sus respuestas.
   g) ¿Cuál es la relación que hay entre los triángulos rectángulos?
   h) Si dibujan más triángulos rectángulos ¿cómo son esos ángulos respecto al ángulo α?
   i) ¿Qué relación tienen los ángulos que dibujaron?

Comparen sus respuestas con las de otras parejas y de manera grupal discutan cómo realizaron el análisis de las gráficas de las rectas. Establezcan conclusiones y escríbanlas en su cuaderno.

Vitaminas

Trabaja la siguiente actividad de manera individual.

1. Analiza en tu cuaderno la gráfica generada por la función $y = \frac{3}{2}x + 2$, completa los datos que sean necesarios para contestar lo siguiente:
   a) Identifica el ángulo que se forma entre de la recta y la abscisa. ¿Cuánto mide este ángulo?
   b) Obtén la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.
   c) Construye triángulos rectángulos considerando la recta y el eje de las abscisas o una recta paralela a éste y calcula el valor de los ángulos.
   d) ¿Qué relación tienen estos ángulos con el primer ángulo calculado? Argumenta tu respuesta.
   e) Supongamos que la razón del cateto opuesto con el cateto adyacente es 0.5, ¿cuánto mide el ángulo?
   f) Si se cambió el valor de la razón del cateto opuesto y el adyacente por 0.8, ¿cambia el valor del ángulo? Explica por qué.

Compara tus respuestas con las que obtuvieron tus compañeros de clase y de manera grupal discutan cómo realizaron la actividad, si tienen dudas pregunten a su profesor.

Organizados en equipos, realicen las siguientes actividades.

5. En un cruce de automóviles se tienen dos calles, que tienen cierta pendiente con respecto a un eje que se ha tomado como referencia. Las calles se intersectan, se desea conocer varios datos. Analicen la gráfica de la Figura 6 y contesten.
   a) Identifiquen y escriban las funciones que generan a las recta 1 y 2.
   b) ¿Cuál es el valor del ángulo α? ¿Cuál es el valor del ángulo β?
   c) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta 1 y 2?
   d) ¿Cuál es el valor del segmento de recta AC?

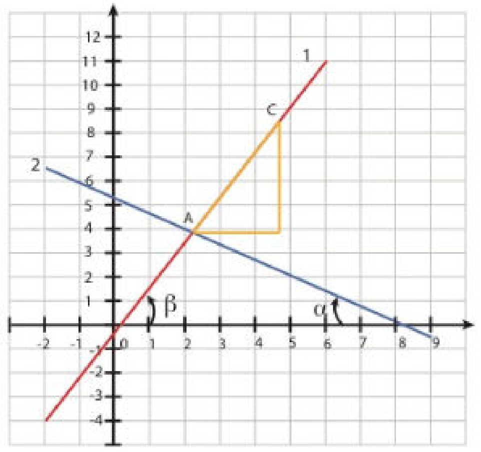


Figura 6

6. Analicen la gráfica de la Figura 7.

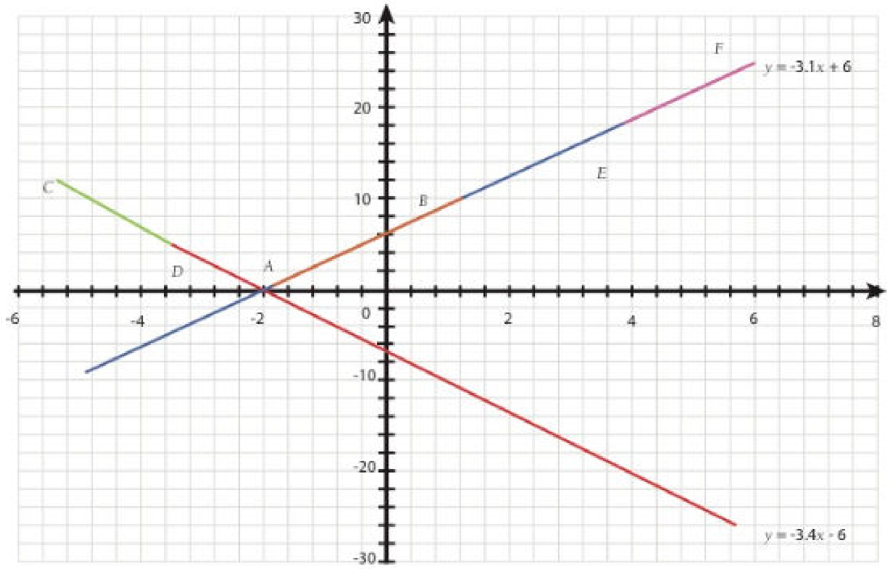


Figura 7

a) Si lo desean, utilicen una hoja cuadrada o un papel milimétrico y grafiquen las funciones a escala numérica.
b) ¿Cuál es el ángulo generado por la recta $y = 3.1x + 6$ con el eje X?
c) ¿Cuál es el ángulo generado por la recta $y = -3.4x - 6$ con el eje X?
d) ¿Cuál es la longitud del segmento de recta AB?
e) ¿Cuál es la longitud del segmento de recta CD?
f) ¿Cuál es la longitud del segmento de recta EF?

Comparen sus respuestas con las que obtuvieron otros equipos, discutan de manera grupal y con ayuda de su profesor, la manera en que realizaron el análisis respectivo para resolver cada situación.

AUTOEVALUACIÓN — Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Analicé las gráficas para determinar características de las rectas.		
Analicé la relación de la pendiente de una recta con el valor del ángulo formado con la abscisa.		
Identifiqué la relación que existe entre el cociente del cateto opuesto con el cateto adyacente y la pendiente de la recta.		

Para concluir

1. Reúnanse en equipos de 4 personas y consideren las rectas que se muestran en la Figura 8. Las rectas forman los ángulos α, β, γ, ϕ con respecto al eje X. Analicen la gráfica y completen la Tabla 2, en su cuaderno. Apóyense de su juego de geometría y calculadora .

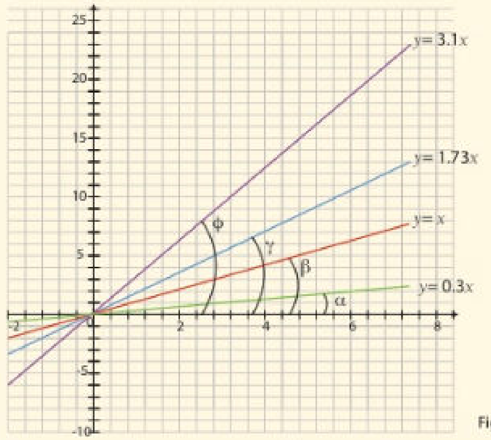


Figura 8

Ángulo	Ángulo en grados	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Razón $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	Cociente (decimal)	Pendiente
α						
β						
γ						
ϕ						

Tabla 2

a) Cada integrante explique ampliamente el análisis realizado para obtener los datos de la Tabla 2.
b) Verifiquen que aunque los datos de unas columnas sean diferentes los datos de las dos últimas columnas coinciden y expliquen por qué.
c) Comenten sus resultados con otros equipos y expliquen por qué obtuvieron esos resultados.

Comparen sus respuestas con las que obtuvieron otros equipos, discutan las relaciones que encontraron entre los ángulos, el cociente de los catetos y la pendiente de una recta. De manera grupal discutan cómo realizaron la actividad, si tienen dudas pregunten a su profesor.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre la relación que existe entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa, y el valor del cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

Lección 4 | Cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo

Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

Ventana

Formen equipos y reúnanse para realizar la siguiente actividad.

1. En la Figura 1 se muestra un poste que, para mantener fijo, se ha sujetado por dos cables tensos.

Conexiones

En la lección anterior has analizado la relación que se cumple entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. También en bloques anteriores analizaste propiedades de triángulos rectángulos semejantes, retomar esos contenidos te será de utilidad en el desarrollo de la presente lección.

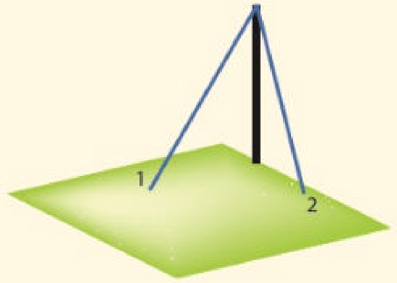


Figura 1

a) Si el poste tiene una altura de 6 m y la distancia en el suelo del poste a la cuerda que tiene el número 1 es de 4 m, respondan:
- ¿Cómo pueden calcular la longitud de la cuerda?
- ¿Cómo calcularían el valor del ángulo entre la cuerda 1 y suelo? Expliquen.
- ¿Qué pasaría si en lugar de conocer la altura del poste supiéramos la longitud de la cuerda?

b) La distancia en el suelo de la cuerda 2 al poste es 2 m, entonces:
- ¿Cuánto mide la longitud de la cuerda 2?
- ¿Cuál es el valor del ángulo formando por la cuerda 2 y el poste?

c) ¿Cuál es el valor del ángulo que se forma entre el poste y la cuerda 1?

d) ¿Cuál es el valor del ángulo que se forma entre la cuerda 2 y el suelo?

Comparen sus respuestas con las de otros equipos, expliquen cada uno de los procedimientos empleados para calcular los datos que se solicitan. Si tienen alguna duda, pidan el apoyo de su profesor para resolverla.

:: | Manos a la obra

Continúen trabajando en equipos para resolver las siguientes actividades.

1. Analicen la Figura 2, de la siguiente página, donde se han colocado líneas verticales debajo de la gráfica de la recta $y = 0.8x + 0.8$.

   a) A partir de los puntos marcados en la Tabla 1, identifiquen los triángulos que se forman, ¿cuántos son?

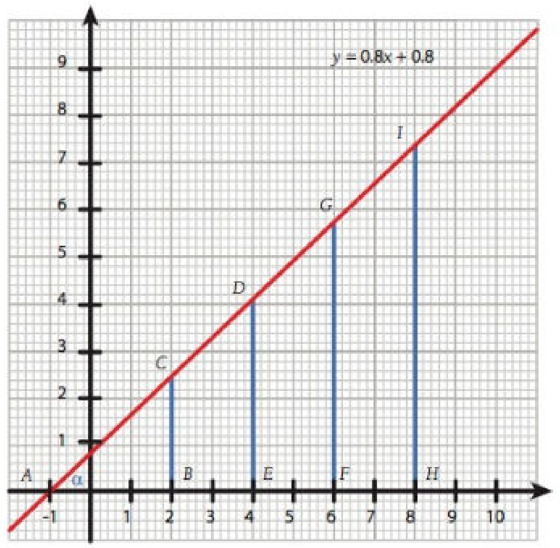


Figura 2

b) Obtengan las medidas de cada uno de los lados de los triángulos y la medida del ángulo α. Con estos datos, completen la Tabla 1. Utilicen su calculadora para realizar las operaciones.

Triángulo	Ángulo α	Cateto opuesto (C.O)	Cateto adyacente (C.A)	Hipotenusa (H)	Razón $\frac{CO}{H}$	Razón $\frac{CA}{H}$	Razón $\frac{CO}{CA}$
ABC							
AED							
AFG							
AHI							

Tabla 1

c) Expliquen cómo obtuvieron la medida del ángulo y la de la hipotenusa.

d) ¿Qué relación encontraron entre los lados de cada uno de los triángulos?

e) ¿Cómo es el resultado de cada una de las razones?

f) ¿Por qué consideran que sucede esto?

g) Si se genera un triángulo más grande, siguiendo la misma construcción, ¿cuál debe ser el valor de la razón $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$?

h) ¿Y de la razón $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$?

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

2. Si en la actividad anterior, en lugar de considerar el eje de las abscisas se considera una línea paralela a éste, ¿cambian los resultados de la razones? Argumenten. Verifiquen sus razonamientos analizando la Figura 3 de la siguiente página.

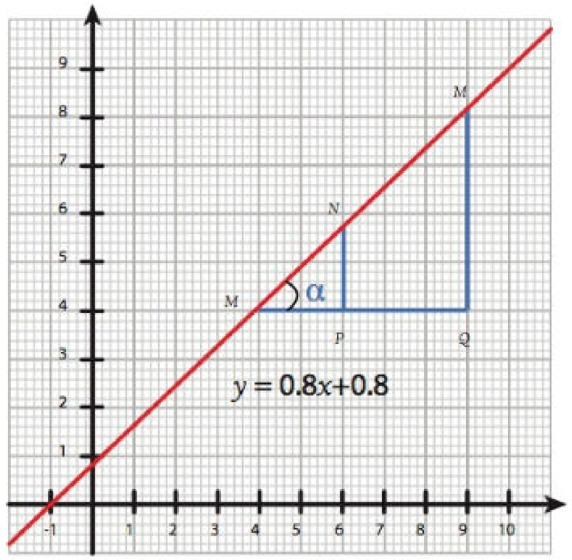


Figura 3

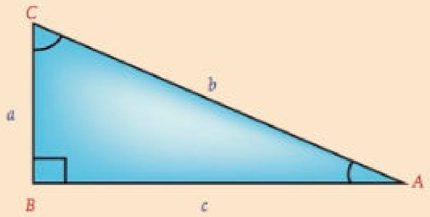
a) Si cambia el ángulo de inclinación de la recta que define las hipotenusas de los triángulos, ¿qué sucede con los triángulos y las razones entre sus lados?
b) Para apoyar sus observaciones analicen en su cuaderno la gráfica de la recta $y = 2x + 1$.

Comparen sus respuestas y reflexiones con otros equipos. Discutan sus observaciones y establezcan conclusiones. Si tienen alguna duda acudan a su profesor, lleguen a una conclusión grupal y escríbanla en su cuaderno.

Herramientas

Se conoce como **razones trigonométricas** a las que se obtienen a partir de los lados de un triángulo rectángulo tomando como referencia uno de sus ángulos agudos.

Las tres razones trigonométricas fundamentales son **seno, coseno** y **tangente**. Con relación al ángulo A, se tiene lo siguiente:



$$\text{sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{c}$$

Nuevamente en equipos lleven a cabo la siguiente actividad, para ello necesitarán una calculadora científica.

3. Analicen el triángulo de la Figura 4.

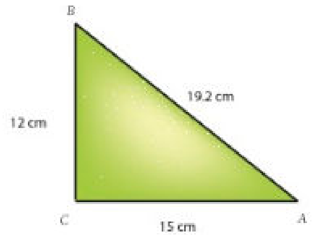


Figura 4

a) Calculen las razones trigonométricas tomando como referencia uno de los ángulos, A o B.
b) ¿Cómo pueden obtener la medida de los ángulos A y B? Expliquen.
c) Con ayuda de su calculadora obtengan la función seno para el valor del ángulo A, ¿cómo es con respecto al resultado de la razón $\frac{12}{19.2}$?
d) ¿Cómo serán el resultado de la función coseno A y la razón $\frac{15}{19.2}$?
e) ¿Ocurrirá lo mismo con el ángulo B? Verifiquen y argumenten su respuesta.

Si se conoce el valor numérico de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo con respecto a un ángulo, es posible calcular el valor del ángulo correspondiente por medio de una calculadora científica.

f) Revisen en su calculadora cómo hacerlo. Por ejemplo, en algunas calculadoras el funcionamiento es el siguiente:

Primero, se oprime la tecla SHIFT seguida de la tecla de la función trigonométrica correspondiente sin tan cos, se escribe en la pantalla el valor numérico del cual se desea saber el ángulo correspondiente y se oprime la tecla = .

Otra forma es utilizar tablas trigonométricas donde, a partir del valor numérico obtenido de una razón trigonométrica, se busca en los datos de la tabla el ángulo que le corresponde.

Por ejemplo, el valor numérico 0.731354 obtenido mediante la razón seno corresponde a un ángulo de 47°, como se muestra en la Figura 5.

De la misma manera, si se conoce la medida de un ángulo puede obtenerse el valor numérico de la razón trigonométrica correspondiente.

Ángulo	Seno	Coseno
46°	0.71934	0.694658
47°	0.731354	0.681998
48°	0.743145	0.669131

Figura 5

g) Verifiquen la medida de los ángulos obtenidos en el inciso b, por medio de su calculadora o las tablas trigonométricas.

Comparen su análisis y respuestas con las de otros compañeros. En plenaria, con ayuda de su profesor, establezcan conclusiones y escríbanlas en su cuaderno.

AUTOEVALUACIÓN: Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Identifiqué catetos opuesto y adyacente para cada ángulo.		
Calculé correctamente las razones trigonométricas.		
Utilicé correctamente las tablas trigonométricas y la calculadora para encontrar los valores de los ángulos.		

Formen parejas para realizar la siguiente actividad.

4. En el triángulo equilátero de la Figura 6 se ha trazado una de sus alturas, formándose dos triángulos rectángulos.
   a) Después de analizar la figura respondan:
   - ¿Cuánto mide la altura?

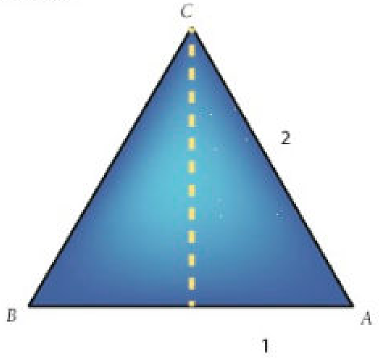


Figura 6

   - ¿Cuál es el resultado de las razones seno A y coseno A?
   - ¿Cuál es el valor de seno B y coseno B?
   - ¿Cómo son entre sí las razones anteriores? Expliquen.
   - ¿Cuál es el valor de tangente A y tangente B?
   - ¿Cómo se relacionan estos valores?

   b) Para generalizar las observaciones anteriores calculen las razones trigonométricas para los ángulos A y B del triángulo de la Figura 7, donde las medidas de los lados se han representado con las letras a, b y c, respectivamente.

   c) ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos interiores de un triángulo?
   d) En un triángulo rectángulo, ¿cuánto suman las medidas de los ángulos agudos?

sen A=
cos A=
tan A=
sen B=
cos B=
tan B=

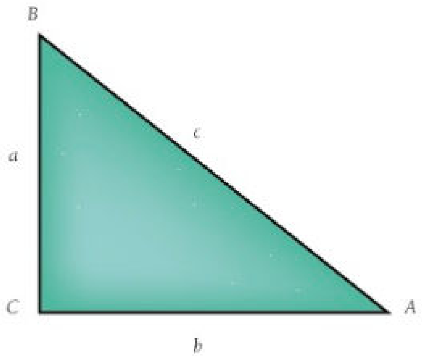


Figura 7

   e) Por la característica anterior, ¿qué relación tienen entre sí los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?
   f) ¿Qué pueden concluir acerca del valor numérico de la razón seno y la razón coseno de ángulos complementarios?
   g) ¿Qué relación existe entre la tangente de ángulos complementarios?
   h) Sin utilizar calculadora, indiquen el resultado de multiplicar la tangente de un ángulo de 20° por la tangente de un ángulo de 70°.

Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Anoten en sus cuadernos las conclusiones, si tienen alguna duda soliciten el apoyo del profesor para aclararlas.

RDT

Revisa el contenido de la siguiente página electrónica: http://www.disfrutalasmatematicas.com/seno-coseno-tangente.html (última consulta: 6 de junio de 2013).
Ahí encontrarás información que te será de utilidad para complementar los contenidos de esta lección. Al terminar, comparte tus experiencias con tus compañeros. En caso de dudas o dificultades, solicita el apoyo de tu profesor.

Vitaminas

De forma individual, resuelve la siguiente actividad.

1. Determina las medidas de los tres lados y ángulos del triángulo de la Figura 8.

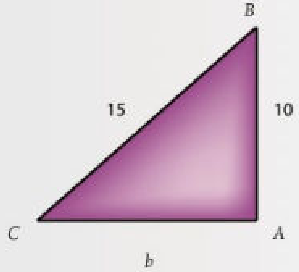


Figura 8

2. Encuentra el valor las incógnitas de cada triángulo de la Figura 9.

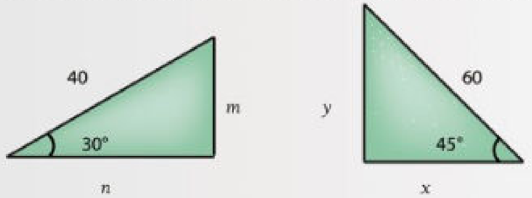


Figura 9

Compara tus respuestas con los demás compañeros y verifiquen que sean correctas.

Para concluir

Reúnete con un compañero para resolver los siguientes desafíos.

1. La ruta de un teleférico es de 1.62 km como se muestra en la Figura 10.

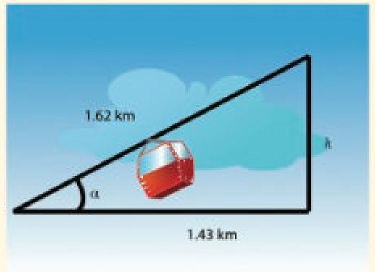


Figura 10

Determinen.

a) La altura h a la que se eleva el teleférico.
b) El valor del ángulo de elevación.

2. A partir de los datos que se muestran, completen las razones trigonométricas faltantes, donde A y B son los ángulos agudos complementarios de un triángulo rectángulo.

sen $A = 0.82$	sen $B = 0.57$
cos $A =$	cos $B =$
tan $A =$	tan $B = 0.70$

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Expliquen cómo resolvieron los desafíos y los razonamientos en los que basan sus respuestas. Con ayuda de su profesor, lleguen a un consenso grupal.

RDT

Visita, también, la página electrónica: http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/mapas_contenido/mat/mat3_b4.php#pe (última consulta: 14 de noviembre de 2013).
Revisa el contenido del interactivo correspondiente a la sesión "La competencia", de la secuencia Razones trigonométricas.
Al terminar comparte tus experiencias con tus compañeros. En caso de dudas o dificultades, solicita el apoyo de tu profesor.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre el análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

___

___

___

Lección 5 | Razones trigonométricas

Explicitación y uso de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente.

Ventana

1. Reúnanse en parejas y analicen la Figura 1.

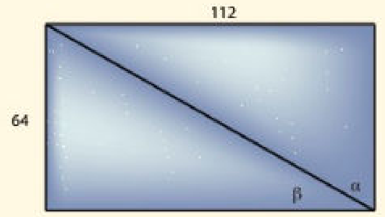


Figura 1

Determinen:

a) ¿Cuál es el valor del seno del ángulo α y el seno del ángulo β?
b) ¿Cómo calculan el valor de la diagonal del rectángulo? ¿Cuál es ese valor?
c) ¿Cuál es el valor del coseno del ángulo α y el coseno del ángulo β?
d) ¿Cuál es el valor de la tangente del ángulo α y la tangente del ángulo β?

Comparen con otras parejas cómo calcularon los valores de los ángulos y el valor de la diagonal del rectángulo. Acudan a su profesor en caso de dificultades.

Conexiones

En las lecciones 3 y 4 de este bloque iniciaste el estudio y análisis de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Retomar esos contenidos te será de utilidad en la presente lección.

Manos a la obra

De forma individual, analiza los siguientes problemas y responde las preguntas.

1. En un aeropuerto, el piloto de un avión se reporta a la torre de control para aterrizar, esto lo hace cuando se encuentra a una altura de 800 m. El ángulo de elevación con respecto a la torre de control es de 7°.

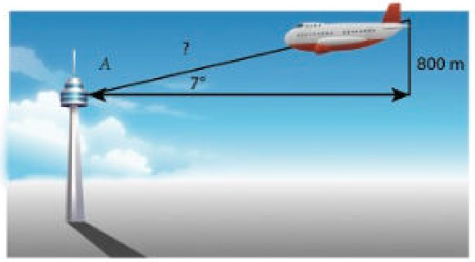


Figura 2

a) ¿A qué distancia de la torre de control, punto A, se encuentra el avión?
b) ¿Cómo calculaste la distancia?

2. Luis espera la llegada de su hermano Daniel en el aeropuerto. Cuando Daniel sale del avión, a 50 m de alto, saluda a Luis que se encuentra en la zona de espera de pasajeros, el ángulo con el que Luis ve a Daniel es de 30°. Observa la Figura 3. Determina:
   a) ¿A qué distancia está Luis de la escalera del avión? ______________________
   b) Explica cómo calculaste esa distancia.
   c) Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

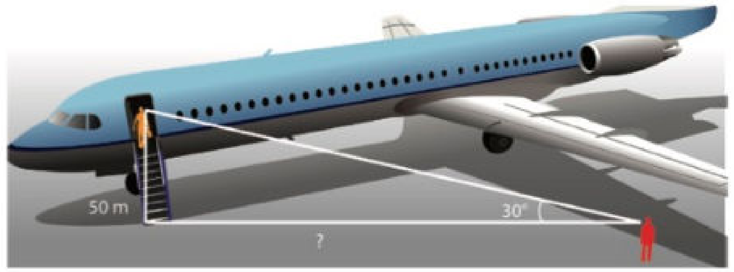


Figura 3

3. Un avión despega de la pista en línea recta, como se muestra en la Figura 4.

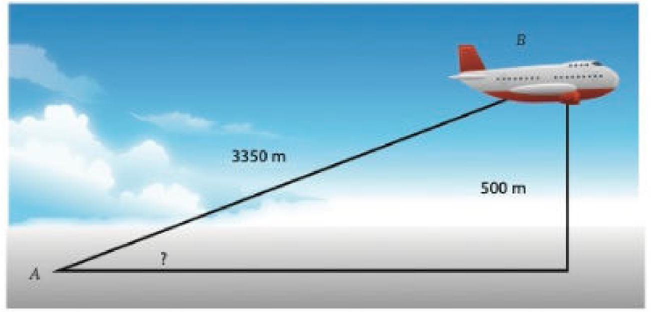


Figura 4

Si en su despegue ha recorrido 3 350 m y se encuentra a una altura de 500 m, responde:
   a) ¿Con cuál ángulo de elevación inicia el vuelo? ______________________
   b) ¿Cómo calculaste el ángulo *A*?
   c) Si en vez de la medida del ángulo *A* quisieras saber la del ángulo *B*, ¿qué cálculos harías?

Reúnete con otros compañeros para comparar sus respuestas y procedimientos. Argumenten ampliamente cómo resolvieron los problemas planteados. En caso de dudas, pregunten a sus profesor.

En parejas realicen la siguiente actividad.

4. Con ayuda de su calculadora o tablas de razones trigonométricas, calculen lo que se indica en cada triángulo.
   a) Figura 5:
      - Medida del lado *b* ______________
      - Medida del lado *c* ______________
      - Medida del ángulo *B* ______________

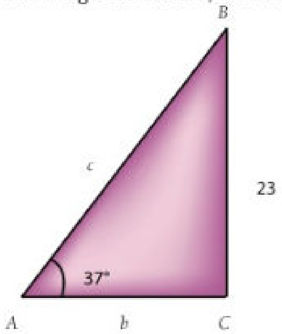


Figura 5

   b) Figura 6:
      - Medida del lado c ______________
      - Medida del ángulo B ______________
      - Medida del ángulo A ______________

Figura 6

Comparen sus respuestas con las de otras parejas y de manera grupal discutan acerca de las funciones trigonométricas sobre los triángulos rectángulos.

Formen equipos y resuelvan los siguientes problemas.

5. En la escuela de Ana María le dejaron de tarea encontrar la altura de los edificios 1 y 2 de su escuela, pero sólo puede ocupar escuadras de su juego geométrico, como se muestra en la Figura 7; la escuadra de 45°- 45° para el edificio 1 y de 60°-30° para el edificio 2. Como una ayuda, la profesora le dijo que pegue un popote grueso en la hipotenusa de cada escuadra y por medio de él vea la parte superior del edificio.

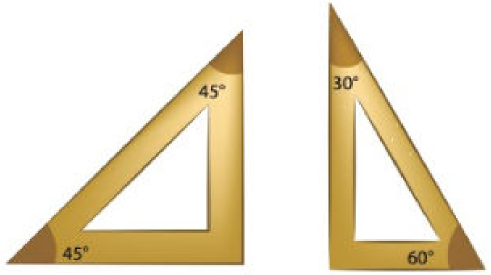


Figura 7

Con la escuadra de 45°, ve la parte superior del edificio 1 desde una distancia de 25 m y con la escuadra de 60° ve la parte superior del edificio 2 a una distancia de 7.23 m.

En la Figura 8, de la siguiente página, se muestra a Ana María observando el edificio 1.

RDT

Visita la siguiente dirección electrónica:
http://www.hdt.gob.mx/GuiaSecundaria/guia/odas/SA3_MA_B4_OA_10073/index.html (última consulta: 12 de noviembre de 2013).
Podrás utilizar razones trigonométricas para calcular medidas de lados de triángulos rectángulos. Comparte tus experiencias y resultados con tus compañeros.

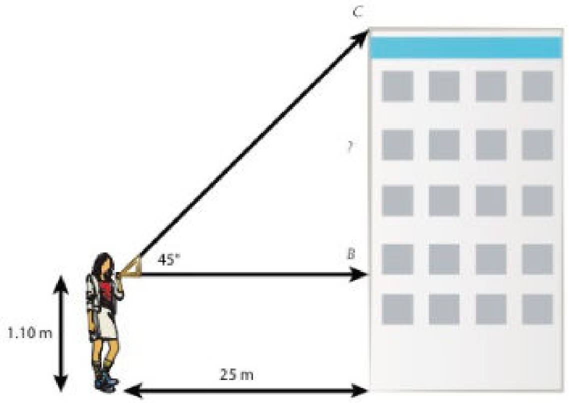


Figura 8

a) ¿Cómo se puede encontrar la altura del edificio con la escuadra de 45° si no se tienen las tablas trigonométricas?
b) Realicen, en su cuaderno, la figura que corresponde al edificio 2 cuando Ana María lo observa con la escuadra de 60°. Tomen en cuenta la altura de Ana María.
c) ¿Qué altura tienen el edificio 1 y el edificio 2? ____________________
d) Si Ana María cambia la escuadra de (45°- 45°) para el edificio 2 y la escuadra de (60° - 30°) para el edificio 1, ¿a qué distancia podrá observar la parte superior de cada edificio?

6. En las proximidades de un castillo, un caballero ve la cima de la torre con un ángulo de elevación de 35°. Al avanzar 10 m, el caballero observa nuevamente la cima de la torre, pero con un ángulo de elevación de 63° como se muestra en la Figura 9.
Analicen la figura y contesten:

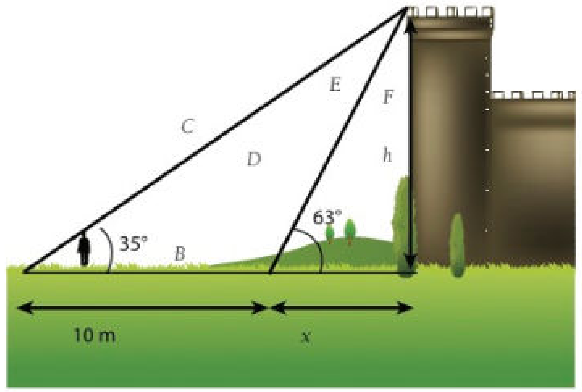


Figura 9

a) ¿Cuál es la altura de la torre? ____________________
b) ¿A qué distancia del castillo se encontraba el caballero la segunda vez que vio la torre? ____________________
c) Si una persona observaba al caballero desde la cima de la torre, ¿cuáles son las medidas de los ángulos E y F? ____________________
d) ¿Cuál es la medida de la distancia C? ____________________
e) ¿Cuál es la medida de la distancia D? ____________________

7. Un arquitecto quiere encontrar la longitud BC de una laguna. Él encontró un punto A situado a 125 m del extremo C de la laguna, desde el cual observa los dos extremos de ésta, con un ángulo de 64°, como se muestra en la Figura 10.

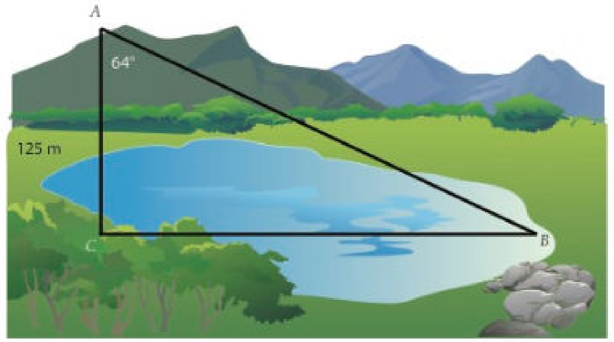


Figura 10

a) ¿Cuál es el ancho de la laguna? ____________________
b) ¿Cuál es el valor del ángulo que se forma en el vértice B? ____________________

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y los procedimientos que emplearon para resolver cada problema. De manera grupal, discutan sus razonamientos de solución y con ayuda de su profesor resuelvan sus dudas y corrijan.

AUTOEVALUACIÓN

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Recordé cuáles son las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.		
Identifiqué la razón trigonométrica útil para resolver cada problema.		
Utilicé correctamente la calculadora o tablas para obtener las funciones trigonométricas de los ángulos involucrados.		
Argumenté ampliamente, con mis compañeros, los razonamientos y procedimientos empleados.		

Vitaminas

En parejas resuelvan los siguientes problemas.

1. Desde un barco se ve un faro hacia el sur y hacia el sureste, en un ángulo de 35°, una casa como se muestra en la Figura 11. Si se sabe que la distancia de la casa al faro es de 3.4 km, ¿qué distancia hay del barco hacia el faro?

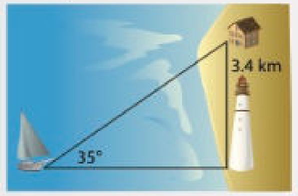


Figura 11

2. Si una persona se coloca a 367 m de la base de una torre, ve la punta de la estructura a un ángulo de elevación de 53°. ¿Cuál es la altura de la torre?

3. A cierta hora del día un edificio de 10 m de altura, como se muestra en la Figura 12, proyecta una sombra de 6.7 m de longitud, ¿con qué inclinación caen los rayos solares a esa hora del día?

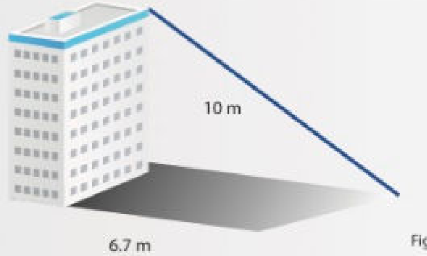


Figura 12

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. En caso de dudas o dificultades, acudan a su profesor.

En parejas, realicen la siguiente actividad.

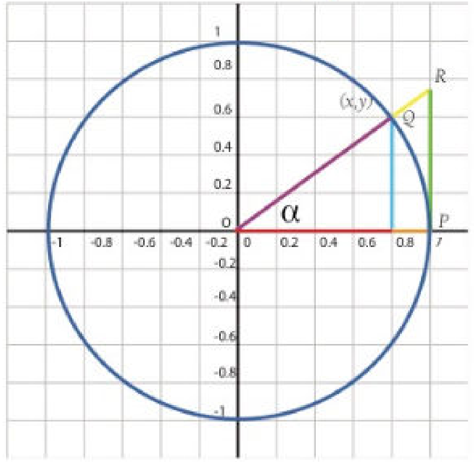


Figura 13

8. Necesitarán compás y una hoja de más de 20 × 20 cm, para ello pueden unir varias hojas de su cuaderno o papel milimétrico. Tracen, en la hoja, un plano cartesiano. Sobre el plano, construyan un círculo que tenga radio 10 cm y centro el origen del plano (O). Consideren que los 10 cm son una unidad, así que en este círculo el radio tendrá valor 1. A un círculo con estas características se le llama círculo unitario.

Coloquen un punto P, en la coordenada (1,0). Marquen el radio fijo OP del círculo. Si se considera otro radio (OQ) que forme un ángulo agudo con el radio OP, es posible construir un triángulo rectángulo como se muestra en la Figura 13.

a) Utilizando las razones seno, coseno y tangente, encuentren:
seno α =______ coseno α =______ tangente α =______

b) Comparen los resultados anteriores con las coordenadas del punto Q, ¿cómo se relacionan?

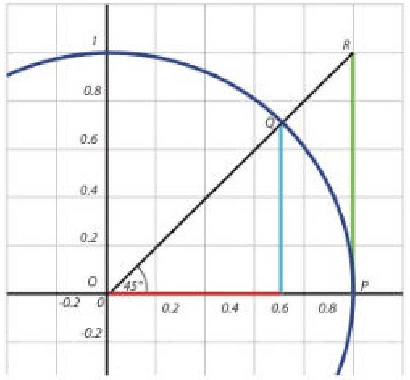


Figura 14

Si en el círculo unitario se traza un ángulo de 45°, como en la Figura 14, analicen.

c) ¿Existe una relación entre los catetos del triángulo? Expliquen.

d) ¿Cuál es el valor de las razones seno 45° y coseno 45°?

e) ¿Cuál es el valor de tangente 45°?

f) Tracen una perpendicular al punto P, que se interseque con la prolongación del segmento OQ. Obtengan la medida del segmento PR ¿cómo es este número con respecto al valor tangente 45°?

g) ¿Esta relación se cumple también en la figura anterior? Verifiquen y argumenten.

En el círculo unitario, analicen las razones trigonométricas de otros ángulos y establezcan conclusiones.

Al terminar, con ayuda de su profesor, indiquen qué segmento corresponde a la razón seno, coseno y tangente en cada figura. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

Para concluir

De forma individual, realiza la siguiente actividad.

1. En la tienda de abarrotes Annie, decidieron colocar una cámara de vigilancia para mayor seguridad de los clientes y cuidado de la tienda. El personal técnico ha instalado la cámara de video en la pared que está frente a la puerta. Se estima que la vigilancia debe centrarse de un punto A que está a 4.7 m de la pared. La cámara tiene una inclinación de 26° respecto al techo.

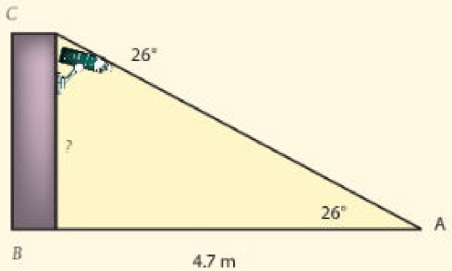


Figura 15

RDT

Visita la página electrónica http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/mapas_contenido/mat/mat3_b4.php#pe (última consulta: 14 de noviembre de 2013).
Ingresa al programa interactivo de la sesión 23.4, correspondiente a la secuencia Razones trigonométricas. Solicita el apoyo de tu profesor para ingresar los números decimales.
Comparte tus experiencias con tus compañeros.

A partir del análisis de la Figura 15, determina:

a) ¿A qué altura sobre la pared debe colocarse la cámara? ______________________

b) ¿Qué distancia habrá de la cámara al punto A? ______________________

c) ¿Cómo obtuviste los datos anteriores.? ______________________

Compara tus respuestas con las de tus compañeros, expliquen cómo resolvieron y corrijan en caso de ser necesario.

2. En parejas, redacten un problema para cuya solución se necesite calcular razones trigonométricas. Resuélvanlo y soliciten a otra pareja que encuentre su solución. De la misma forma, resuelvan con entusiasmo los problemas que sus compañeros les presenten.

De manera grupal comparen sus resultados, acudan a su profesor en caso de que existan dudas.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

____

____

____

Lección 6 | Razón de cambio

Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

Ventana

Conexiones
En segundo grado, en la lección 5 del bloque 5, analizaste por medio de gráficas, tablas y expresiones algebraicas funciones lineales asociadas a diversos fenómenos. Retomar esos contenidos te será de utilidad ya que en esta lección profundizarás dicho análisis.

De manera individual, resuelve la siguiente situación.

1. Alondra inicia una cuenta de ahorros con $20.00 y tiene el firme propósito de incrementar cada semana $10.00. Para llevar un control anota los datos en una tabla.
   La Tabla 1 muestra los ahorros de Alondra después de las primeras cuatro semanas.

Semanas	Ahorro
0	20
1	30
2	40
3	50
4	60

Tabla 1

a) ¿Cómo cambia la cantidad de dinero ahorrado semanalmente?
b) Escribe la expresión algebraica que representa esta situación.
c) ¿Cuál es el valor de la pendiente?
d) Construye, en tu cuaderno, la grafica de los datos de la Tabla 1.
e) ¿Cuánto dinero tendrá en la semana 8?
f) ¿Cuánto dinero habrá ahorrado en 4 meses?

Compara tus respuestas y gráficas con las de otros compañeros. Expliquen cómo identificaron la expresión algebraica y cómo pueden relacionarla con la gráfica correspondiente.

Manos a la obra

Únete con un compañero y resuelvan la siguiente situación.

1. Francisco, Andrea y Jorge deciden ir al cine al estreno de una película. El boleto cuesta $45.00 y el día de promoción $30.00. Como Andrea llevará a su hermano menor al cine, Francisco y Jorge deciden también, cada uno, llevar un invitado.
   a) ¿Cuánto pagarían por sus entradas si sólo fueran Francisco, Andrea y Jorge en un día sin promoción?
   b) ¿Cuánto pagarían en total con los invitados en un día sin promoción?
   c) A partir de la información obtenida completen la Tabla 2. Los costos deben corresponder a un día sin promoción.

Personas	3		6		9	10	
Costos		180		315			495

Tabla 2

d) Con los datos obtenidos en la tabla anterior, realicen la gráfica correspondiente, en el plano de la Figura 1. Asignen los títulos a los ejes.

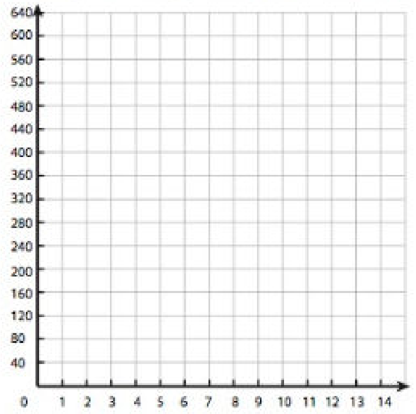


Figura 1

Acerca de...
Educación financiera y del consumidor. Adquirir el hábito del ahorro y establecer un presupuesto te permite alcanzar metas al administrar tus gastos de manera que no superen tus ingresos.

e) ¿Cuánto pagarán por 5 personas?
f) ¿Cuánto pagarán por 14 personas?
g) Analicen el costo de los boletos dependiendo el número de personas en un día de promoción. Construyan la gráfica en su cuaderno.

Comparen con otras parejas cómo consiguieron los valores de la tabla, discutan la forma de completar y como anticiparon el costo de las entradas al cine. Acudan a su profesor en caso de dificultades.

Ahora, trabaja de manera individual.

2. Un agente de ventas, cuyo salario mensual es únicamente por comisión, tiene ingresos del 15% de la cantidad vendida.

a) ¿Cuánto gana de comisión cuando vende $100?
b) ¿Cuánto gana de comisión cuando vende $1 000?
c) ¿Cuánto gana de comisión cuando vende x cantidad de pesos?
d) Completa la Tabla 3.
e) Si se requiere un ingreso de $18 000, ¿cuánto debe de vender?
f) Si la comisión fuera diferente de 13% o 14%, ¿qué expresión algebraica representaría la relación entre las ventas y el salario mensual del vendedor?
g) Construye la gráfica en tu cuaderno y a partir de su análisis determina cuánto ha vendido el agente si lleva acumulados $ 900 de comisión.
h) ¿Cómo se incrementa el ingreso de comisión por cada $ 1 000 en ventas?

Ventas	Ingresos por comisión al 15%
$10 000	$1 500
$20 000	
$30 000	
$40 000	

Tabla 3

Compara con otros compañeros tus resultados, discutan los procedimientos empleados para obtenerlos. Acudan a su profesor en caso de dificultades.

3. Reúnanse en equipos y analicen la gráfica de la Figura 2 que representa las ventas de una tienda de almacén durante unos meses del año.

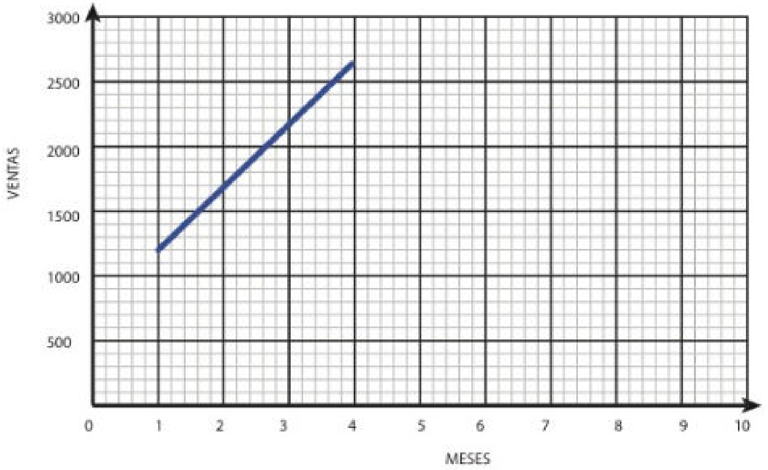


Figura 2

a) ¿Cuánto varían las ventas del primer al tercer mes? ____________

b) ¿Cuánto varían las ventas del primer al cuarto mes? ____________

c) Suponiendo que el crecimiento de ventas fue el mismo cada mes, ¿cuánto variaron las ventas del cuarto al sexto mes? ____________

d) ¿Cuál es el valor de ventas en el mes 12? ____________

e) Describan el crecimiento mensual de las ventas de la tienda.

f) Calculen cómo es el cociente entre el incremento o cambio en las ventas con respecto al número de meses transcurridos, es decir, la razón de cambio entre estos valores. Realicen los cálculos para los periodos definidos en los incisos *a*, *b* y *c*.

g) ¿Cómo son estos valores? ____________

h) ¿Qué pueden concluir? ____________

Glosario

razón de cambio. Cociente que se obtiene de dividir el incremento o cambio de una cantidad entre el correspondiente incremento de otra con la que está relacionada.

Continúen trabajando en equipos para resolver las siguientes situaciones.

4. En las pruebas de resistencia de un automóvil se analiza la distancia recorrida en función del tiempo. Completen la Tabla 4, considerando que la velocidad del automóvil es de 20 m/s y que parte del reposo.

Tiempo (s)	0.5	1	1.5	2	2.5	3	6	8	10	15
Distancia (m)	10		30	40			120			

Tabla 4

a) Con los datos obtenidos en la tabla anterior realicen la gráfica correspondiente.

b) ¿Cuál es la distancia que recorre el automóvil en 9.5 s? ¿Y en 40 s?

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta situación?

d) ¿Cómo varía la distancia cada 5 segundos?

e) ¿Cuál es la razón de cambio entre la distancia por unidad de tiempo?

f) Comparen la razón anterior con el dato de la velocidad del automóvil, ¿cómo son estos datos?

g) Analicen la expresión algebraica del inciso *c*, ¿qué pueden concluir si comparan los términos de la expresión con la razón de cambio?

RDT

Visita la página electrónica: http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/mapas_contenido/mat/mat3_b1.php#pe (última consulta: 14 de noviembre de 2013). Ingresa al programa interactivo de la sesión 6.2, correspondiente a la secuencia La razón de cambio. Comparte tus experiencias con tus compañeros.

5. En un aeropuerto un avión despega con cierto ángulo, al transcurrir 2 minutos alcanza una altura de 1 000 ft y de 3 000 ft a los 6 minutos. El avión continúa elevándose en esa forma hasta alcanzar una altura de 30 000 ft, para conservar esa altura la mayor parte del viaje.

a) Con la información proporcionada, elaboren la gráfica en el plano de la Figura 3 y, en su cuaderno, la tabla de datos correspondiente.

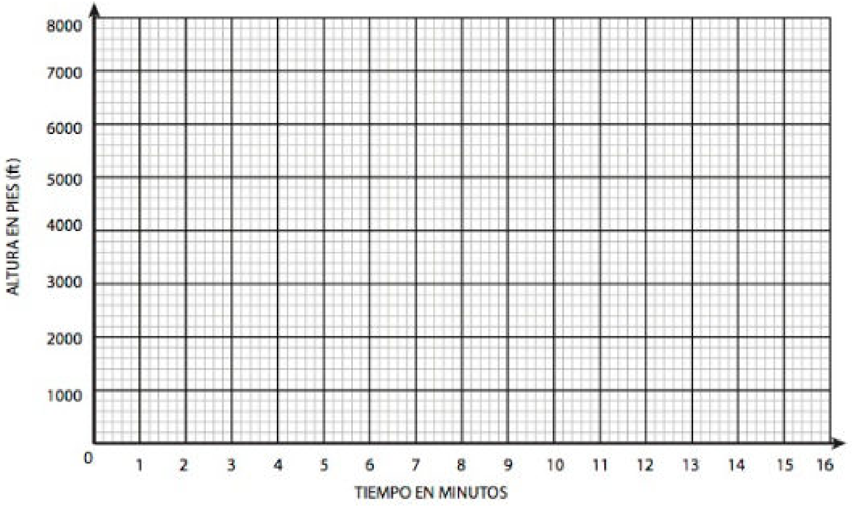


Figura 3

b) Determinen la tasa de ascenso en pies por minuto.

c) ¿Qué altura alcanzará el avión a los 14 minutos?

d) ¿En cuánto tiempo alcanza la altura en la que se efectuará el vuelo?

e) ¿Qué altura alcanzará el avión a los 16 minutos?

f) ¿Cuál es la expresión algebraica que define la relación entre la altura alcanzada y el tiempo transcurrido?

g) ¿Existe alguna relación entre esta expresión y la tasa de ascenso? Argumenten.

Comparen sus resultados con otros equipos y expliquen ampliamente la manera en que resolvieron las situaciones planteadas. Soliciten el apoyo de su profesor en caso de dificultades. Al terminar, escriban sus conclusiones en el cuaderno.

AUTOEVALUACIÓN — Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Obtuve las expresiones algebraicas que representan variación lineal entre dos conjuntos de datos.		
Identifiqué la razón de cambio entre dos cantidades que guardan entre sí una relación lineal.		
Analicé la relación entre la razón de cambio y la pendiente de la recta que representa la relación de los datos.		

En parejas analicen la siguiente situación.

6. Entre las pruebas hechas a un automóvil están las de aceleración, es decir, variación de velocidad en un intervalo de tiempo determinado. Los resultados que se registran por segundo, se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5

Segundo	1	2	3	4	5
Velocidades (m/s)	15	30	45	60	75

a) Construyan la gráfica de los resultados obtenidos. ____________

b) Calculen el incremento de la velocidad en cada segundo. ____________

c) Calculen la velocidad del automóvil a los 7, 8, y 13 segundos. ____________

d) ¿Cuál es la aceleración con la se mueve el automóvil? ____________

Comparen sus respuestas y procedimientos con los de sus compañeros. Acudan a su profesor en caso de dificultades.

Vitaminas

De manera individual analiza la siguiente situación.

1. En la Figura 4, se muestra la gráfica de distancia contra tiempo de las marcas de un corredor en un día de entrenamiento.

Figura 4

a) ¿Qué distancia recorrió en 6 segundos?

b) ¿Qué distancia recorrió del segundo 2 al segundo 5?

c) ¿Cuántos metros recorrió por cada segundo transcurrido?

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación de los datos de la gráfica?

e) ¿Cuál fue la velocidad del corredor?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

Para concluir

Reúnete con otro compañero y analicen las siguientes situaciones.

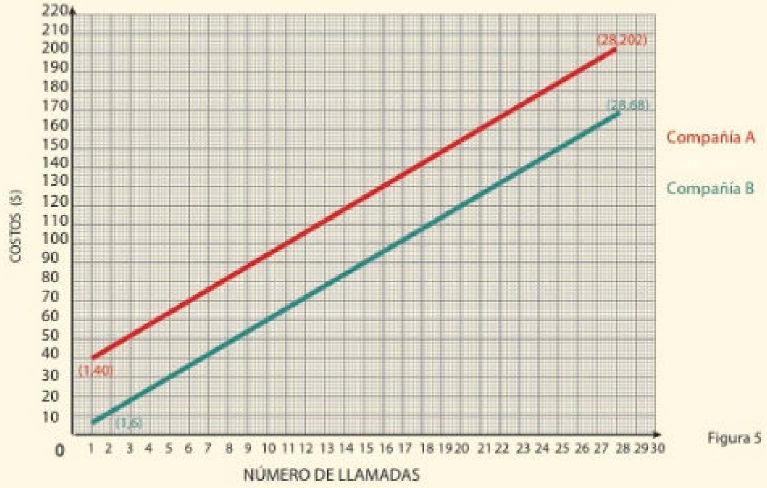


Figura 5

1. La gráfica de la Figura 5 representa el costo de dos compañías de telefonía móvil.
   a) ¿Cuál es el incremento en el costo por llamada en cada una de las compañías? ____________
   b) ¿Cuál es el incremento en el costo de 30 a 80 llamadas en la compañía A y B? ____________
   c) ¿Cuál es la relación entre las razones de cambio y la pendiente de las rectas? ____________
   d) ¿Qué compañía conviene más en cuanto a costo? ¿Por qué? ____________
2. Redacten un problema que implique calcular razones de cambio entre conjuntos de datos y analizar las gráficas de los mismos. Presenten su problema a otras parejas y revisen que se solucione correctamente. Asimismo, resuelvan el problema que sus compañeros les presenten.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre el análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal y la relación que tiene con la pendiente de la recta.

____

Lección 7 | Medidas de dispersión de datos

Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.

Conexiones

En segundo grado analizaste casos en los que las medidas de tendencia central, media aritmética o mediana, son útiles para comparar dos conjuntos de datos. Estos contenidos y las propiedades de estas medidas te serán de utilidad para desarrollar satisfactoriamente la presente lección.

Ventana

En parejas analicen la siguiente situación.

1. En una bodega de playeras, se realizó un estudio acerca de las tallas de mayor venta. Los datos obtenidos se organizaron en la Tabla 1.

Talla	Frecuencia
30	18
32	20
33	22
34	25
36	15

Tabla 1

a) ¿Cuáles son la media, la mediana y la moda de los datos anteriores? ____________

b) Si se decide hacer una oferta para las 2 tallas más vendidas, ¿cuáles tallas se deben elegir? ¿Por qué? ____________

c) ¿Qué talla se acerca más al promedio? ____________

d) ¿Cuántos datos de los obtenidos en el estudio son mayores que la media? ____________

e) Si se fabricara sólo una talla, con base en los valores de la mediana, la media o la moda, ¿qué valor resultaría más útil para tomar la decisión?

Comparen con otras parejas sus resultados, discutan la forma de solución de la actividad. Acudan a su profesor en caso de dificultades.

:: | Manos a la obra

Trabaja de manera individual y resuelve la siguiente situación.

1. En dos grupos diferentes se realizó un examen a nueve alumnos, en la Tabla 2 se muestran los resultados.

Grupo 1	8	8	8	5	4	6	8	5	6
Grupo 2	7	8	8	7	6	6	5	7	8

Tabla 2

a) ¿Cuál es el promedio de cada grupo? ____________

b) De acuerdo con los promedios, ¿qué grupo obtuvo mejores resultados?

c) Para cada grupo encuentra la diferencia entre los datos mayor y menor, ¿cómo puedes relacionar esta diferencia con los datos de cada grupo?

d) Si decimos que un grupo es "homogéneo" en la medida en que las calificaciones se acercan a la calificación promedio, ¿cuál de los dos grupos consideras que es más "homogéneo"?

e) Explica tus argumentos para decir que, los grupos no son homogéneos o que uno es más homogéneo que otro.

Compara con otros compañeros tus resultados y discutan la manera en que resolvieron la actividad. En caso de dudas, soliciten el apoyo de su profesor.

Acerca de...

Diversidad cultural. Aunque en los conjuntos de datos estadísticos, es deseable la mínima variabilidad; dentro de la sociedad es de gran valor la diversidad de opiniones así como la preservación y promoción de las distintas culturas existentes.

Trabaja con un compañero para resolver la siguiente situación.

2. En un examen de preparación para el ingreso a la educación media superior Fabiola, Rubén y Patricia decidieron competir para saber quién tendría mejores respuestas. El examen constaba de 10 temas y cada tema tenía 10 preguntas. En la Tabla 3 se muestra el número de aciertos que cada estudiante obtuvo en los diez temas.

Tema	Fabiola	Rubén	Patricia
1	2	7	5
2	9	4	7
3	10	2	8
4	2	9	7
5	3	6	3
6	8	3	5
7	9	6	2
8	9	7	5
9	5	1	6
10	7	4	8

Tabla 3

a) ¿Cuál es el promedio de aciertos de cada uno de los estudiantes? ____________

b) ¿Quién de los tres obtuvo mejor promedio? ____________

c) ¿Consideran que en este caso el promedio de cada estudiante es un valor representativo de los aciertos en cada tema? Justifiquen su respuesta.

d) Describan cuál es la separación o dispersión de los aciertos de cada estudiante respecto al promedio de cada uno de ellos.

e) ¿Cómo podrían medir esta dispersión o separación de los datos de cada lista con referencia a la media? Expliquen.

f) ¿Pueden decir quién consideran que tuvo calificaciones más dispersas o menos dispersas? Argumenten.

Comparen con otras parejas sus resultados, compartan sus reflexiones y su técnica para medir la dispersión de datos.

Herramientas

Un índice de la variabilidad de un conjunto de datos numéricos es el **rango**, el cual se obtiene al calcular la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo.

Continúen trabajando en parejas.

3. Tras el análisis de la información de la sección Herramientas, consideren nuevamente los datos de la Tabla 3.
   a) Identifiquen los valores máximo y mínimo en la columna de las calificaciones de Fabiola y calculen su diferencia.
   b) Hagan lo mismo con los datos de las columnas restantes.
   c) ¿Cuál es el resultado de estas diferencias? ____________________
   d) ¿Qué características de los datos pueden concluir a partir del valor numérico de sus rangos? ____________________

Organizados en equipos, lleven a cabo la siguiente actividad.

4. Analicen las listas de la Tabla 4.

Lista 1	Lista 2	Lista 3
5	14	13
3	12	8
8	1	3
10	7	5
14	8	6
7	9	7
4	7	9
6	3	8
$\bar{x} =$	$\bar{y} =$	$\bar{z} =$

Tabla 4

   a) Calculen los promedios de cada lista y completen la última fila de la Tabla 4.
   b) ¿Cuál lista tiene el mayor promedio? ____________________
   c) Obtengan los rangos de los datos de cada lista.

$R1 =$ $\qquad$ $R2 =$ $\qquad$ $R3 =$

   d) ¿Cuál de los datos tiene menor rango? ____________________
   e) ¿Cuál de las listas tiene mayor dispersión? ____________________
   f) ¿Qué pueden concluir acerca de la variabilidad de los datos si el valor numérico del rango es muy pequeño?
   g) Si el rango es muy grande, ¿qué pueden concluir al respecto?

Herramientas

Otra medida de dispersión es la **desviación media**, la cual es el resultado del promedio de las diferencias entre cada dato con respecto a la media, sin considerar el signo negativo de las diferencias, en caso de que algunas (o todas) resulten negativas.

5. Continúen con el análisis de los datos de la Tabla 4.
   a) ¿Cuál de las listas tiene la menor desviación media? ____________________
   b) ¿En cuál lista el promedio es un valor representativo de los datos? ____________
   c) ¿Qué pueden concluir acerca de la dispersión en un conjunto de datos a partir del valor numérico de la desviación media?
   d) Comparen las conclusiones hechas a partir del valor del rango.
   e) ¿Pueden concluir que una lista que tiene menor rango que otras, también tendrá menor desviación media? Argumenten.

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Verifiquen que sus cálculos sean correctos. Discutan sus observaciones acerca de las características de los datos de las listas. Con ayuda de su profesor, escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Nuevamente en equipos, realicen la siguiente actividad.

6. En una cafetería se quieren analizar los datos de las ventas de paletas, por lo que durante seis meses se registraron las ventas realizadas en 15 días diferentes. Los datos obtenidos se registraron en la Tabla 5.

Mes	Datos	Media	Rango	Desviación
1	5, 7, 8, 2, 11, 6, 9, 8, 7, 7, 7, 5, 3, 1, 6			
2	1, 2, 3, 1, 4, 5, 6, 7, 5, 5, 6, 6, 8, 8, 9			
3	0, 0, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 0, 1			
4	2, 1, 4, 4, 3, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 8			
5	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1			
6	0, 0, 0, 0, 3, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1			

Tabla 5

   a) Calculen el promedio de ventas de cada mes, ¿en qué mes hubo mayores ventas? ____________________
   b) Describan cómo es la separación o dispersión de los datos en cada mes.
   c) Calculen el rango y la desviación media de las ventas de cada mes.
   d) ¿El valor de las medidas de dispersión confirma sus observaciones del inciso b? Expliquen.
   e) Para cada mes, construyan la gráfica de frecuencia de sus datos.
      - ¿En qué eje ubicarán los datos y en qué eje la frecuencia?
      - Tracen una línea paralela al eje de las ordenadas, que pase por la abscisa que corresponde al valor numérico de la media.
      - Describan cómo son las gráficas.
      - Establezcan una relación entre la forma de las gráficas y el valor numérico de su correspondiente desviación media.

Comparen con otros compañeros sus resultados y discutan la manera en que resolvieron la actividad. De manera grupal, establezcan conclusiones con el apoyo de su profesor.

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Analicé los datos encontrando la dispersión en cada tabla.		
Calculé correctamente la desviación media y el rango de cada conjunto de datos.		
Establecí una relación entre el valor numérico de las medidas de dispersión y la forma de las gráficas de los datos.		
Participé de la discusión y establecimiento de conclusiones de forma grupal.		

AUTOEVALUACIÓN

Vitaminas

De manera individual realiza las siguientes actividades.

1. Una fábrica que produce jabones ha realizado un estudio de mercadotecnia referente a su producción por algunos años, en la Tabla 6 se muestran los resultados obtenidos.

Año	Producción	Año	Producción
2001	1074167	2006	1454350
2002	1312573	2007	1672680
2003	1472000	2008	1980950
2004	1574000	2009	1919120
2005	1613460	2010	1885230

Tabla 6

a) Calcula la media de la producción de jabones, la desviación media y el rango.
b) ¿Cuál es el promedio de los valores y en qué año se ubica?
c) De acuerdo con las medidas de desviación anticipa cómo será la gráfica de los datos.
d) Construye la gráfica y compárala con tus observaciones.

2. Una fábrica produce dos tipos de motores pequeños; según su departamento de control de calidad, la funcionalidad de cada motor es de aproximadamente 5000 horas continuas, para comprobarlo se mide la duración de 150 motores de cada tipo.
Las medias en cada grupo de motores resultaron aproximadamente iguales, pero el rango de las duraciones de los motores tipo 1 fue de 532 horas y de los tipo 2 fue de 938 horas. ¿Cuál de los dos tipos de motores es más confiable? Justifica tu respuesta.

Compara tus respuestas con las de tus compañeros. En caso de dudas, soliciten el apoyo de su profesor.

RDT

Visita la página electrónica http://www.irfaperu.org/aulas/secundaria/secundaria4s18f3.pdf (última consulta: 7 de junio de 2013).
En ella encontrarás información y actividades que te permitirán consolidar los contenidos desarrollados en esta lección.
Comparte tus experiencias con tus compañeros. Solicita el apoyo de tu profesor en caso de dudas.

Para concluir

En parejas realicen la siguiente actividad.

1. Una empresa de extracción de agua realizó un estudio para analizar su productividad en diferentes años, sus resultados se muestran en la Tabla 7 y en la gráfica de la Figura 1, con base en estos resultados contesten las siguientes preguntas.

Año	Extracción agua (miles de litros)	Año	Extracción agua (miles de litros)
1978	133 247	1985	558 004
1979	194 485	1986	525 235
1980	302 957	1987	470 704
1981	302 957	1988	490 925
1982	400 778	1989	477 055
1983	544 614	1990	466 470
1984	561 005	1991	466 105

Tabla 7

Año	Extracción agua (miles de litros)
1977	157 332
1992	432 854

Tabla 8

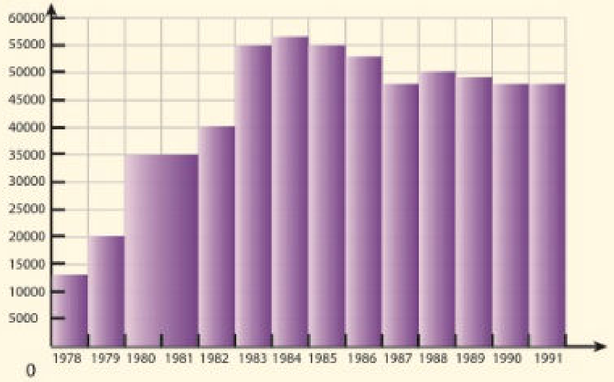


Figura 1

a) ¿Cuál es el rango de los datos? ______
b) Calcula la desviación media de los datos de extracción. ______
c) Describe la dispersión entre los datos, apoyándote también en la gráfica. ______
d) Si a los datos de la tabla se agrega la información de la Tabla 8, ¿cómo se modifican las medidas de dispersión? ______
e) ¿Cómo cambiará la gráfica? ______
f) ¿Cuál de las dos medidas de dispersión consideran tiene mayor representatividad de los datos?

Comparen con otros compañeros sus resultados y discutan la manera en que resolvieron la actividad. Acudan con su profesor en caso de dificultades. De forma grupal establezcan conclusiones.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre la medición de la dispersión de un conjunto de datos, así como la relación que hay entre la desviación media y el rango como medidas de dispersión.

______

______

Primera parte.

Responde y describe los procedimientos necesarios para resolver los siguientes problemas:

Bordados

1. En una fábrica de textiles se diseñan diferentes bordados para decorar las telas. Uno de los diseños del catálogo se puede observar en la siguiente figura.

Figura 1

a) ¿Cuántos puntos tendrá el bordado de la posición 5?
b) ¿Qué expresión algebraica indica el número de puntos en cada posición?

La Figura 2, muestra otro de los diseños para bordados.

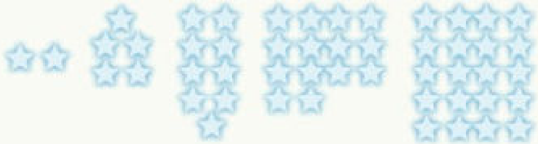


Figura 2

c) ¿Cuántas estrellas hay en la posición 7 de la secuencia?
I. 44 II. 35 III. 27 IV. 34

La sombra

2. En la Figura 3 se muestra un árbol y la sombra que proyecta en un día soleado, ¿cuál es el ángulo de elevación al Sol con respecto al suelo?

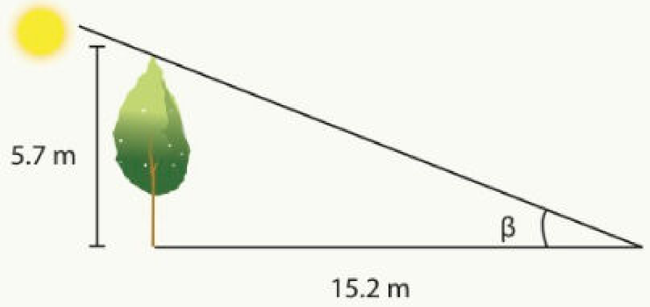


Figura 3

Segunda parte

De las respuestas que se proponen, escoge la opción correcta y márcala con una ✓:

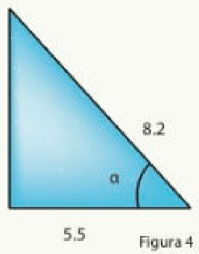


Figura 4

1. ¿Cuál es el valor del ángulo α en la Figura 4?
a) 35.4° b) 47.8° c) 45.2° d) 34.2°

2. Obtén el ángulo que forma un cable de 15.75 m de longitud con respecto al piso y que se encuentra sujeto a un poste que mide 8.5 de alto. Observa la Figura 5.
a) 9.41° b) 32.6° c) 57.33° d) 28.35°

Figura 5

3. Observa la Figura 6, ¿cuánto mide la altura H?
a) 8.4 m b) 6.6 m c) 4.9 m d) 2.8 m

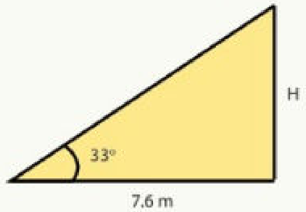


Figura 6

4. En la Tabla 1, se muestran los puntajes obtenidos en la prueba de Español y Matemáticas de 5 estudiantes. ¿Cuál es el promedio y la desviación media de los puntajes obtenidos en cada asignatura?

Prueba Español	6	9	8	8	7
Prueba Matemáticas	8	9	7	8	10

Tabla 1

a)

	Promedio	Desviación
Español	9.6	0.89
Matemáticas	8.4	0.85

b)

	Promedio	Desviación
Español	6.7	0.88
Matemáticas	7.6	0.91

c)

	Promedio	Desviación
Español	7.6	0.88
Matemáticas	8.4	0.88

d)

	Promedio	Desviación
Español	8.4	0.85
Matemáticas	7.2	0.85

EVALUACIÓN

Solicita a tu profesor que evalúe tus aprendizajes esperados, proporcionándote indicaciones y sugerencias para mejorar.	Incipiente	En desarrollo	Logrado
Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.			
Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.			
Calcula y explica el significado del rango y desviación media.			
Sugerencias:			

BLOQUE 5

Aprendizajes esperados	
	• Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado. • Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones. • Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas. • Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.
COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN:	• Resolver problemas de manera autónoma. • Comunicar información matemática. • Validar procedimientos y resultados. • Manejar técnicas eficientemente.

	CONTENIDOS		DOSIFICACIÓN BIMESTRAL
LECCIÓN 1	Uso de ecuaciones para la resolución de problemas	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	
LECCIÓN 2	Análisis de secciones de cilindros y conos	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	
LECCIÓN 3	Relaciones entre cilindros y conos	Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	
LECCIÓN 4	Resolución de problemas de cilindros y conos	Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	
LECCIÓN 5	Análisis de situaciones con variación lineal o cuadrática	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	
LECCIÓN 6	Análisis de resultados de un juego justo	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	

Lección 1 | Uso de ecuaciones para la resolución de problemas

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

Ventana

Conexiones
En los bloques 4 y 5 de segundo grado trabajaste con ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones 2×2, mientras que en los bloques 1, 2 y 3 de este libro estudiaste la resolución de ecuaciones cuadráticas, estos conocimientos te serán de utilidad en esta nueva lección.

Reúnanse en parejas y analicen las siguientes situaciones.

1. Un terreno rectangular, Figura 1, en el que se construye un vivero de planta forestal, tiene 60 m² de área; se sabe que uno de sus lados mide siete metros más que el otro.
   a) ¿Qué ecuación modela esta situación? ______
   b) ¿Qué tipo de ecuación es? ______
   c) ¿Qué opciones existen para resolverla? ______
   d) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ______
   e) ¿Cuáles son las dimensiones del terreno? Justifiquen su respuesta.

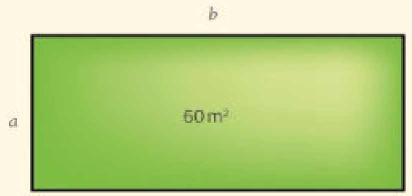


Figura 1

2. Para que Daniel pueda obtener una beca, el promedio de cada una de las cinco asignaturas principales debe ser nueve. Daniel obtuvo las calificaciones que se muestran en la Tabla 1 en los primeros dos bimestres.

Materias	Español	Historia	Matemáticas	Geografía	Física
Primer bimestre	10	8	8.7	8.3	8.3
Segundo bimestre	8.7	9.3	8.3	9	8.5

Tabla 1

Averigüen si Daniel puede obtener una beca.
   a) ¿Cuáles son las ecuaciones correspondientes para encontrar la calificación que necesita obtener, en el tercer bimestre, en cada una de las asignaturas? ______
   b) ¿Cómo podrían resolver estas ecuaciones? ______
   c) ¿Cuáles son las calificaciones mínimas que debe obtener Daniel para su beca?

Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Analicen los procedimientos empleados para resolver las situaciones anteriores y si obtuvieron los mismos resultados. En caso de dudas o diferencias identifiquen el motivo y soliciten el apoyo de su profesor.

:: Manos a la obra

Continúen trabajando en parejas y analicen las siguientes situaciones.

1. ¿Existe algún número cuyo cuadrado menos su quíntuplo sea 84?
   a) ¿Cuál es la ecuación que modela esta situación?
   b) ¿Qué tipo de ecuación es?
   c) ¿Cómo podrían encontrar la solución a esta ecuación?
   d) ¿Cuántas soluciones tiene?
   e) Si se añade la condición de que el número debe ser positivo, ¿qué solución darían?

2. En una de las esquinas del vivero se planea cultivar cedros, la porción del terreno que se ha preparado para ello forma un triángulo rectángulo, como se muestra en la Figura 2. Para cercar el terreno de los cedros se han empleado 7.21 m de malla y se necesitarán otros 10 m para terminar la cerca.
   ¿Cuáles son las dimensiones del terreno destinado para cultivar cedros?

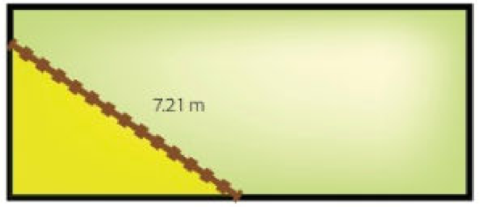


Figura 2

   a) ¿Cómo representan algebraicamente el problema anterior?
   b) ¿Qué tipo de ecuación obtienen?
   c) ¿Qué procedimientos se emplean para resolverla?
   d) ¿Cuál de estos procedimientos consideran más efectivo?
   e) ¿Cuáles son las dimensiones de los lados del triángulo?

Acerca de...
Educación ambiental para la sustentabilidad. La actividad forestal es de gran importancia para restaurar y volver productivas las áreas deforestadas y degradadas. Cada uno debe hacer su contribución, por ejemplo, reflexionar sobre nuestros hábitos de consumo, que son una de las causas de deforestación.

3. Uno de los trabajadores del vivero puede sembrar un lote en tres horas; otro, en cuatro horas y un tercer trabajador, en cinco horas.
   a) ¿En cuántas horas podrían sembrar el mismo lote si lo hicieran los tres trabajadores al mismo tiempo?
   b) ¿Qué porción del lote siembra cada trabajador en una hora?
   c) ¿Qué expresión algebraica representa la situación que se plantea?
   d) ¿Cómo pueden resolverla? Expliquen.

4. Al terminar la jornada en el vivero a uno de los trabajadores se le paga $600.00 en monedas de $5.00 y de $10.00; dando un total de 84 monedas.
   a) ¿Cuáles son las ecuaciones que modelan esta situación?
   b) ¿Por cuál método pueden resolver este sistema?
   c) ¿Existe una única solución a este sistema?
   d) ¿Cuántas monedas hay de $5 y cuántas de $10?
   e) Si la cantidad de monedas fuera 75, ¿cómo serían las ecuaciones de esta nueva situación? ¿Cuál sería la cantidad de monedas de $5 y $10?

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y comenten los procedimientos que llevaron a cabo para resolver cada una de las situaciones anteriores, discutan la manera en que plantearon las ecuaciones y verifiquen, con ayuda de su profesor, que sean correctas. De manera grupal, analicen las expresiones algebraicas obtenidas, incluidas las de la sección Ventana y observen el tipo de problemas en los que se empleó cada una. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Analiza la siguiente situación.

5. Completa las tablas de valores de x y de y de las siguientes funciones:

$y = x^2 + x - 25$

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y								

Tabla 2

$y = 5x^2 - 10x$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

Tabla 3

a) Para cada una de las situaciones existe un valor de x en el que el valor de y es 0; ¿entre qué números se encuentra este valor?
b) Para cada una de las situaciones encuentra el valor de x para el cual y toma el valor de 0.
c) Resuelve las ecuaciones algebraicamente.
d) En tu cuaderno, traza la gráfica de cada una de las funciones.
e) ¿Cuáles son los puntos en los que la gráfica interseca al eje de las abscisas?
f) Compara los puntos anteriores con los obtenidos de la solución algebraica. ¿Qué puedes concluir al respecto?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros, discutan sobre las intersecciones de la gráfica en el eje X y con el apoyo de su profesor escriban sus conclusiones en su cuaderno.

Herramientas

Los puntos en los que la gráfica de una función interseca al eje de las abscisas se conocen como **raíces** (o ceros) de la función, las cuales deben coincidir con las soluciones obtenidas algebraicamente.

6. Reúnanse en parejas y analicen la siguiente ecuación.

$3x(3x - 2) = 6(x^2 - x) + 2(3^2)$

a) ¿Qué tipo de ecuación es?
b) ¿Qué métodos podrían emplear para resolverla?
c) Tracen la gráfica de la ecuación, ¿en cuántos puntos interseca al eje X?
d) ¿Cuántas soluciones tiene?

Reúnanse con otras parejas y comparen las respuestas de sus reflexiones; analicen en qué deben basarse para indicar el grado de una ecuación o de una expresión algebraica. Al terminar, expongan sus reflexiones al resto del grupo y escriban sus conclusiones.

7. Reúnanse en equipos, analicen las ecuaciones y hagan lo que se solicita.

a) $2(2a) + a = 95$

- Analicen qué tipo de ecuación es la anterior.
- De acuerdo con los datos que se muestran en la ecuación, completen y resuelvan el siguiente enunciado:
  Un triángulo isósceles tiene por perímetro 95 cm; si sus lados más largos miden el __________ del más corto, ¿cuánto mide cada lado?
- Plantea otro problema que pueda resolverse con esta ecuación.

b) $x + y = 14$
$x - y = 2$

- ¿Cómo podrían resolver el sistema?
- ¿Qué situaciones se pueden modelar?
- Escriban un problema que se pueda resolver con el sistema anterior.

c) $x^2 + 2x = 15$

- ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación anterior?
- Planteen y resuelvan un problema que pueda modelarse con esta ecuación.

d) Escojan una de las ecuaciones de los incisos anteriores y tracen su gráfica respectiva, a partir de ella redacten otro problema cuyo contexto sea distinto al que plantearon anteriormente.

Compartan los problemas que plantearon con sus compañeros y solicítenles que los resuelvan. Verifiquen los procedimientos empleados y las respuestas obtenidas. De la misma manera, participen con entusiasmo en la resolución de los problemas que sus compañeros les propongan.

Al terminar, con el apoyo de su profesor, redacten un problema más elaborado con cualquiera de las ecuaciones anteriores, de manera grupal reflexionen acerca de la cantidad de problemas que pueden plantear partiendo de una misma ecuación.

En tu biblioteca

Consulta el libro de Carlos Bosch Giral, *Una ventana a las incógnitas*. México: SEP/Santillana (2002).
En este libro encontrarás diferentes tipos de aplicaciones del álgebra y cómo se han ido desarrollando a lo largo de la historia.

RDT

Visita la página: http://www.hdt.gob.mx/new_media/telesecundaria_3/matematicas_b5/oda_3220_0/recurso/ (última consulta: 15 de noviembre 2013).
En ella encontrarás algunos ejercicios que te ayudarán a consolidar los contenidos de esta lección. Al terminar comparte con tus compañeros tu opinión sobre este recurso y si tienes alguna duda, consulta a tu profesor.

RDT

Visita la página electrónica http://www.vitutor.com/index.html (última consulta: 9 de junio de 2013).
En la sección de Álgebra, podrás encontrar algunos problemas que, al resolverlos, te ayudarán a consolidar los contenidos de esta lección. Al terminar comparte con tus compañeros tus experiencias y conclusiones. En caso de dudas acude a tu profesor.

AUTOEVALUACIÓN — Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Identifiqué el tipo de expresiones algebraicas propuestas.		
Propuse problemas que involucran ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas de ecuaciones 2 × 2.		
Resolví correctamente los problemas propuestos por mis compañeros.		
Expresé mis reflexiones acerca de la utilidad de las ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas de ecuaciones, en distintos contextos.		

Vitaminas

Analiza la siguiente situación.

1. En otra parte del vivero se plantarán pinos, el área destinada tiene las características que se indican en la Figura 3.

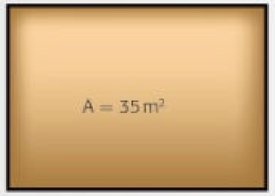


Figura 3

a) ¿Cómo se modela la situación anterior?
b) ¿Qué procedimiento utilizarías para resolverla?
c) ¿Qué tipos de ecuaciones se obtienen?
d) ¿Cuántas soluciones encontraste?
e) ¿Cuánto mide el ancho y el largo del terreno?
f) De acuerdo con la ecuación cuadrática que obtuviste completa la Tabla 4 con los valores de y correspondientes a los de x.

x	3	4	5	6	7	8	9
y							

Tabla 4

g) Traza la gráfica con la información de la tabla y verifica que los puntos en donde la curva interseca al eje de las X coinciden con los resultados obtenidos algebraicamente.

Compara tus resultados con los de tus compañeros y verifiquen que sean correctos, comenten cuál de los métodos les pareció más efectivo para resolver las ecuaciones. Planteen otro problema que pueda resolverse con las ecuaciones obtenidas.

Para concluir

Reúnanse en parejas y analicen la siguiente situación.

1. En clase de matemáticas la profesora de Daniel encargó a sus alumnos construir una caja sin tapa, a partir de un cartulina cuadrada a la que se le recortan cuadrados de 8 cm en cada esquina, el desarrollo plano de la caja se muestra en la Figura 4. La caja tendrá un volumen de 128 cm³

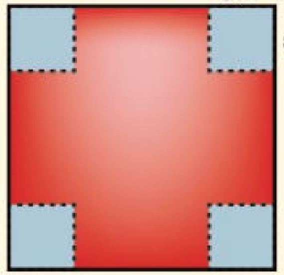


Figura 4

a) ¿Qué forma tendrá la caja? ______
b) ¿Cómo se calcula el volumen de la caja? ______
c) ¿Cómo se expresa el valor de la longitud del lado de la base de la caja? ______
d) ¿Cuánto mide el lado de la cartulina cuadrada? ______
e) Si la profesora les pide que construyan una caja que tenga un valor menor a 128 cm³, ¿cuánto podrían medir los lados de los cuadros que se recortan en las esquinas para que la caja tenga esas características? ______
 • ¿Cuántas soluciones encontraste para esta nueva situación? ______
f) Si quieres calcular el volumen máximo posible de la caja, ¿cuánto debe medir el lado de los cuadros que se recortan en las esquinas? ______
 • ¿Cuáles son los valores posibles de los lados? ______
 • Calcula el volumen para algunos de los valores posibles. ______
 • ¿Cuál es volumen máximo posible? ______

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre los procedimientos que utilizaste en esta lección para resolver los nuevos retos, así como la ventaja que presenta el uso de algunos métodos con respecto a otros.

______
______
______

Lección 2 | Análisis de secciones de cilindros y conos

Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

Conexiones

En la lección 2 del bloque 4, analizaste las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo, también analizaste la construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos. Es importante que retomes estos conocimientos, pues a partir de ellos trabajaremos esta nueva lección.

Ventana

De forma individual analiza las siguientes situaciones.

1. Considera el rectángulo de la Figura 1.

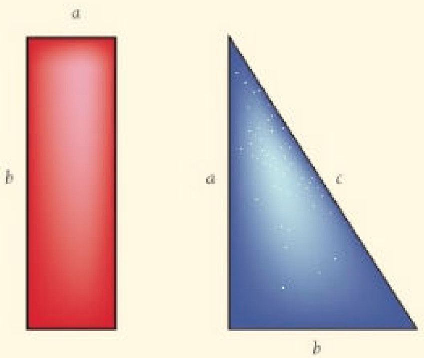


Figura 1

a) Si hicieras girar el rectángulo sobre el lado b, ¿qué cuerpo geométrico obtendrías? ______

b) Identifica cada una de sus partes. ¿Cuántas bases tiene? ¿Sus bases son congruentes? ______

2. Si las medidas del triángulo de la Figura 1 son $a = 7$ cm y $c = 8.6$ cm, ¿cuáles serían las medidas del cuerpo que se genera al girarlo tomando como eje el lado a? ______

a) ¿Cuál sería la medida del ángulo que se forma entre el eje de giro y la base del cuerpo que se forma? ______

b) Si giras el triángulo en torno al lado b, ¿el cuerpo generado conservaría las mismas características? ______

Reúnete con otros compañeros y comparen sus respuestas. Expliquen en qué basaron sus razonamientos.

:: | Manos a la obra

Cortes del cilindro recto

De forma individual, realiza la siguiente actividad, para ello necesitarás plastilina y una navaja.

1. Con la plastilina construye cuatro cilindros y, con extremo cuidado, realiza con la navaja los cortes que se indican en la Figura 2.

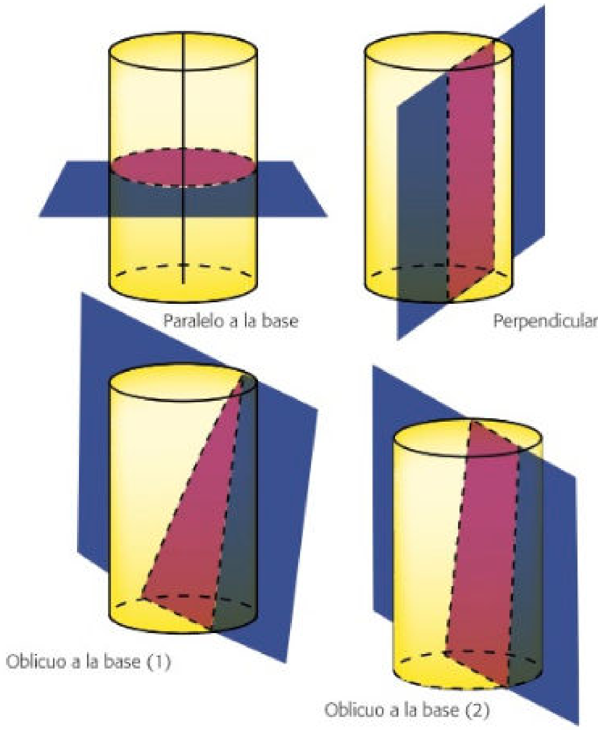


Figura 2

a) ¿Qué figura se forma al realizar el corte paralelo a la base?
b) ¿Qué figura se forma al realizar el corte perpendicular a la base?
c) ¿Qué figura se forma al realizar el corte oblicuo a la base (1)?
d) ¿Qué figura se forma al realizar el corte oblicuo a la base (2)?
e) Con estos cortes, ¿éstas son las únicas figuras que se pueden formar?
f) ¿En cuáles casos la base resulta congruente con la nueva figura?
g) Dibuja en tu cuaderno cada una de las formas que encontraste.

Al terminar, compara con otros compañeros tus respuestas; si no coinciden analicen las diferencias y con ayuda de su profesor pónganse de acuerdo en los resultados.

En parejas, lleven a cabo la siguiente actividad.

2. En una fábrica de tinacos, las tapas circulares de estos se obienen a partir de un tubo de plástico como el de la Figura 3, del cual se corta un molde de 8 cm de grosor.

Figura 3

a) Describan el corte que le realizarían al tubo de plástico para generar las tapas.
b) Con las medidas del tubo, ¿cuántas tapas completas pueden cortar?
c) ¿Existe otro corte para generar estas tapas? Justifiquen su respuesta.
d) Si la fábrica cuenta inicialmente con 300 tinacos, ¿cuántos tubos requiere para hacer las tapas de todos los tinacos?

Comparen sus respuestas con las de otras parejas. En caso de dudas, soliciten el apoyo de su profesor.

Cortes del cono recto

En equipos, realicen la siguiente actividad. Nuevamente necesitarán plastilina y una navaja.

3. Construyan cuatro conos rectos con plastilina y con la ayuda de la navaja realicen los cortes que se indican en la Figura 4.

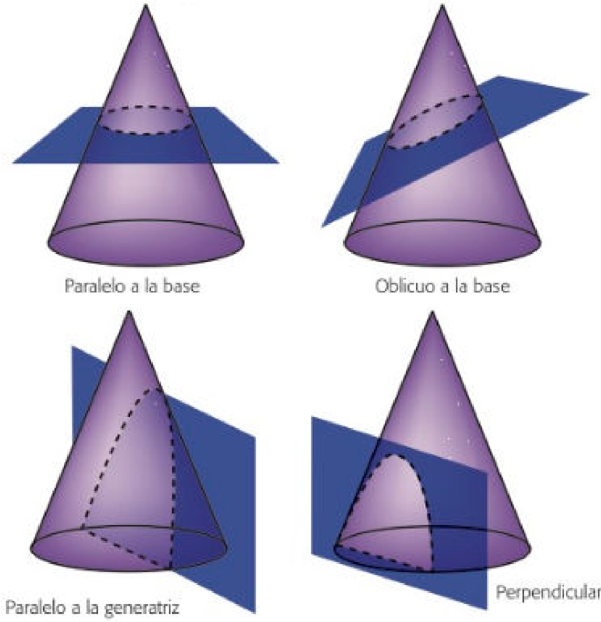


Figura 4

a) ¿Qué figura se forma al realizar el corte oblicuo a la base?
b) ¿Qué figura se forma al realizar el corte perpendicular a la base?
c) ¿Qué figura se forma al realizar el corte paralelo a la generatriz?
d) ¿Qué figura se forma al realizar el corte paralelo a la base?
e) Con estos cortes, ¿siempre se forman las mismas figuras?
f) ¿Tienen estas nuevas figuras algún parecido a las caras del sólido?
g) Dibujen en su cuaderno cada una de las figuras que obtuvieron con los cortes.

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y juntos reflexionen acerca de las figuras que encontraron, con la ayuda de su profesor escriban las conclusiones en el cuaderno.

Herramientas

Las figuras que se obtienen al cortar el cono son cuatro: **circunferencia**, **elipse**, **parábola** y **hipérbola**, a estas cuatro figuras se les llama **cónicas**. Deberás recordarlas pues las estudiarás en tus cursos de bachillerato.

Continúen en equipos y analicen las siguientes situaciones.

4. Con un vaso de agua y un cono de plástico formen el arreglo que se muestra en la Figura 5. Sobre el vaso marquen cinco niveles y poco a poco llenen con agua cada nivel. Observen las figuras que forman la paredes del cono con la superfice del agua mientras van llenando el vaso.


Figura 5

a) ¿Qué formas se generan por la intersección de la superficie del agua con las paredes del cono?
b) La forma que se genera, ¿siempre es la misma? Justifiquen su respuesta.
c) Conforme van llenando el recipiente en los niveles que marcaron, ¿qué relación existe entre el nivel del agua y el radio del círculo correspondiente a cada uno de los cinco niveles?

5. La misma empresa de tinacos trabaja un lote de filtros industriales que se colocan en la entrada de la tubería y evitan que los sólidos que se encuentran en el agua de las tuberías entren al tinaco. El filtro de agua tiene las dimensiones que se muestran en la Figura 6.

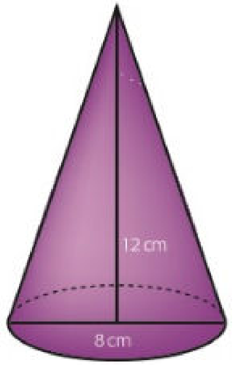


Figura 6

a) ¿Cuánto mide la altura del cono y cuánto mide el radio de la base?
b) Si hicieran cortes paralelos a la base, ¿qué figuras verían?
c) Supongamos que hacen un corte paralelo a la base a cada centímetro de altura, ¿cuántos cortes tienen?
d) De acuerdo con las alturas que se indican en la Tabla 1, si realizaran cortes paralelos a la base en cada una de estas alturas, ¿cuánto medirá el radio de cada círculo formado por estos cortes?

Altura del cono (h) cm	12	10	8	6	4	2
Radio de la base (r) cm						

Tabla 1

e) Con la información que aparece en la Tabla 1, en su cuaderno, tracen la gráfica que representa la relación entre las diferentes alturas del cono, al hacer cortes paralelos a su base, y el radio de las círculos que se forman.
f) ¿Qué tipo de relación existe entre la altura y el radio?
g) Si a un cilindro recto le hicieran los mismos cortes, ¿qué formas aparecerían en los cortes?

Compartan sus respuestas con el grupo y analicen los diferentes métodos que otros compañeros emplearon para resolver estas situaciones y junto con su profesor escriban sus conclusiones en el cuaderno.

AUTOEVALUACIÓN

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Analicé las formas que se obtienen si se hacen diversos cortes en un cilindro recto y en un cono recto.		
Calculé las medidas de las formas que se obtienen al hacer cortes paralelos a la base en conos y cilindros rectos.		
Determiné la relación entre el radio y la altura de los conos que se generan al realizar varios cortes paralelos a la base de un cono.		

Vitaminas

De forma individual, resuelve las situaciones que se plantean.

1. Uno de los tinacos en forma de cilindro, como el que se muestra en la Figura 7, se desea colocar dentro de un espacio libre que tiene por altura 4.5 m.
   a) Con base en las medidas que se indican, ¿es posible colocar el cilindro dentro del espacio asignado?

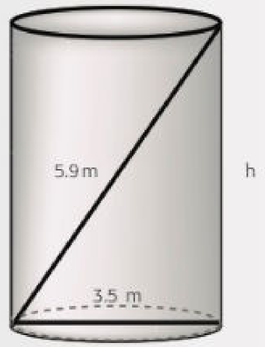


Figura 7

2. El mismo contenedor tiene un filtro en forma de cono, con la misma altura y diámetro. En tu cuaderno dibuja el filtro y señala sus dimensiones.
   a) ¿Cuánto mide la generatriz del filtro?
   b) Si se le hizo un corte paralelo a la base a una altura de 2.4 m, ¿cuánto mide el radio generado por este corte?
   c) Si el diámetro del cono fuese de 1.1 m, ¿cuál sería la altura del corte?

Compara tus resultados con los de tus compañeros y verifiquen que sean correctos. Comenten cuáles métodos emplearon para resolver las situaciones anteriores y cuál de estos métodos les resulto mejor. Si tienen dudas consulten con su profesor.

Para concluir

Reúnanse en parejas y analicen los siguientes retos.

1. El nuevo modelo de tinacos industriales es más ancho que el anterior, más alto y su tiempo de vida es mayor en un 25%. En un centro comercial han decidido cambiar sus tinacos anteriores por los nuevos, se han encargado 16 tinacos y deben colocarse en una sección con 20 m de largo y 25 m de ancho. La sección tiene un pasillo y un cuarto de control. En la figura 8 se muestra la distribución de la sección y las medidas del tinaco.

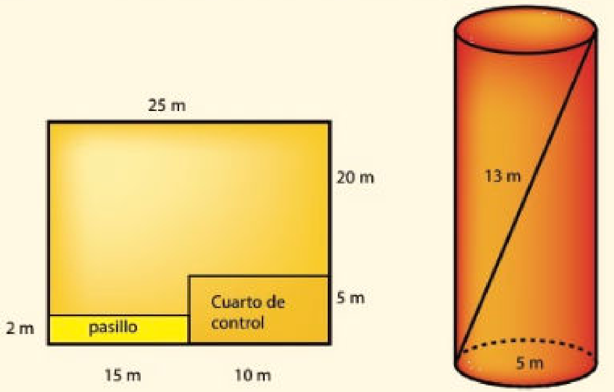


Figura 8

a) ¿Cuáles son las medidas de los tinacos? ____________________
b) ¿Cuántos tinacos se pueden colocar en la habitación? ____________________
c) ¿Existe algún acomodo en el cual todos los tinacos puedan quedar dentro de esta sección? Justifiquen su respuesta.

2. La empresa no quiso invertir en los filtros de este nuevo modelo y decidió reutilizar los que ya tenía, que son como el que se muestra en la Figura 9. ¿Cuáles son las medidas de estos filtros?

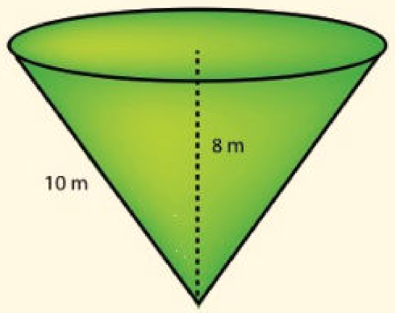


Figura 9

a) Si el filtro se coloca dentro del tinaco y se sujeta de la tapa, ¿los filtros del centro comercial se pueden colocar en los nuevos tinacos? Expliquen su respuesta.

Compartan sus respuestas con otros compañeros, reflexionen acerca de las dudas y los razonamientos que siguieron en la resolución de estas situaciones. Con el apoyo de su profesor verifiquen que sean correctos. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre los cortes que se pueden realizar en cilindros y conos y las formas que se obtienen a partir de estos cortes.

____
____
____
____
____
____

Lección 3 | Relaciones entre cilindros y conos

Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.

Ventana

Reúnanse en parejas y analicen las siguientes situaciones.

1. Una empresa vende jugos naturales envasados, una presentación de estos jugos es en un envase de cartón como el de la Figura 1.

Conexiones
En la lección 4 del bloque 2 de segundo grado de secundaria estudiaste la justificación de las fórmulas para calcular el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos. Retomar esos contenidos te será de utilidad para desarrollar con éxito los contenidos de la presente lección.

Figura 1

a) Dibujen en su cuaderno cómo se verá el desarrollo plano del envase extendido.
b) ¿Qué figuras lo componen? ____________________
c) ¿Cuántas bases tiene?, ¿cómo son las bases? ____________________
d) ¿Cuál es el volumen del envase? ____________________
e) Si cortaran por la mitad el envase, ¿cuál sería el volumen? ____________________

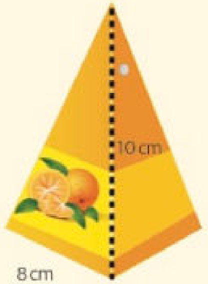


Figura 2

2. Otra presentación de jugo es un envase más pequeño como el que se muestra en la Figura 2.
   a) ¿Cuál es el volumen del envase? ____________________

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Expliquen los procedimientos empleados para resolver las situaciones anteriores.

:: | Manos a la obra

Construcción de las fórmulas para calcular el volumen del cilindro

En parejas, lleven a cabo las siguientes actividades.

1. Analicen los prismas de la Figura 3.

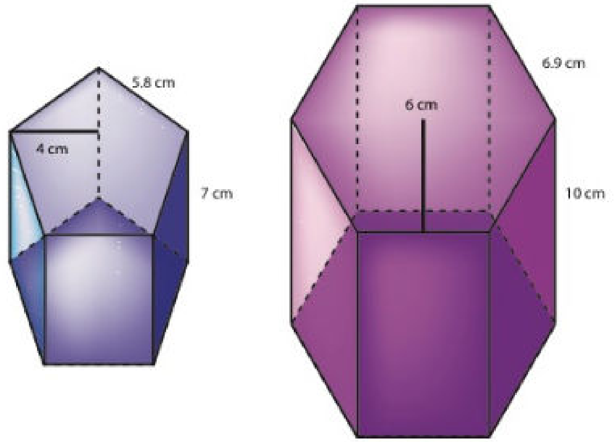


Figura 3

a) ¿Qué tipo de prismas son? ____________________
b) ¿Cuáles son las formas de sus bases? ____________________
c) ¿Cuál es el volumen de cada prisma? ____________________
d) ¿Cómo calcularon los volúmenes? ____________________

2. Observen los prismas que aparecen en la Figura 4.

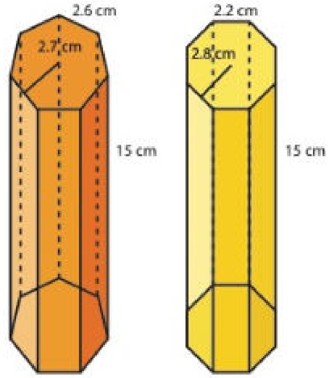


Figura 4

a) ¿Cuales son las dimensiones de cada prisma? ____________________
b) ¿Cuáles polígonos forman sus bases? ____________________
c) ¿Cómo se calcula el volumen de estos prismas? ____________________

d) ¿Cuál es el volumen de cada prisma? ____________________
e) ¿Cuál de los dos prismas tiene mayor volumen? ____________________
f) ¿Qué ocurriría con el volumen del prisma si la base fuese un decágono y se conservara la misma altura? ____________________
g) Comprueben sus razonamientos calculando el volumen de un prisma decagonal cuya base mide 1.85 cm por lado y su apotema es 2.546 cm.

3. Consideren los dos polígonos de la Figura 5.

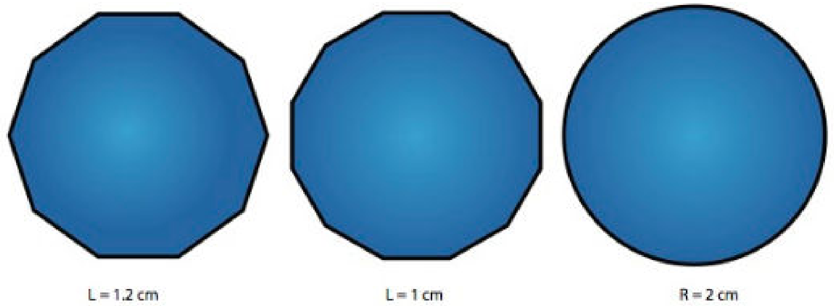


Figura 5

a) ¿Cuántos lados tiene el primer polígono?, ¿y el segundo?
b) ¿Cuál es la medida del ángulo central en cada uno?
c) Calculen la medida del apotema y la distancia de uno de sus vértices al centro del polígono.
d) ¿Cómo se relacionan entre sí estas medidas?
e) Calculen las áreas de estos polígonos y compárenlas con el área del círculo, ¿cómo son entre sí?
f) Si se construyen otros polígonos con un mayor número de lados, con la condición de que la distancia del vértice al centro sea la misma, ¿qué ocurrirá con sus áreas?
g) ¿Qué ocurrirá con las medidas del apotema y la distancia del vértice al centro de las bases?
h) Realicen los cálculos necesarios para saber las dimensiones de un polígono de 20 lados.
i) ¿Qué pueden concluir al respecto?

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Discutan cómo cambia la forma de la base conforme aumenta el número de lados, así como el cambio en el volumen del prisma que se genera. Escriban en su cuaderno las conclusiones.

Continúen trabajando en parejas y resuelvan las siguientes actividades.

4. Consideren el cilindro de la Figura 6 y conforme a los datos que se observan analicen las siguientes preguntas.

Figura 6

RDT

Visita la página: http://www.hdt.gob.mx/GuiaSecundaria/guia/odas/SA3_MA_B5_OA_10093/index.html (última consulta: 15 de noviembre 2013).
En el recurso digital reafirmarás la construcción de la fórmula del volumen del cilindro.

a) ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro? ____________
b) ¿Cómo son las bases del cilindro? ____________
c) ¿Cuál es el área de la base? ____________
d) ¿Cómo se calcularía el volumen del cilindro? ____________
e) ¿Cuál es el volumen del cilindro? ____________
f) Si comparan el volumen de los prismas de la actividad 2 con el del cilindro, ¿cuál volumen es mayor?
g) De acuerdo con su análisis, ¿qué datos necesitan para calcular el volumen de un cilindro?
h) ¿Cómo escribirían una fórmula para calcular el volumen de cualquier cilindro?

Comparen sus resultados con los de otros compañeros. De manera grupal, analicen la similitud entre las fórmulas de los prismas y del cilindro, y exprésenla algebraicamente. Escriban las conclusiones en su cuaderno.

Construcción de las fórmulas para calcular el volumen del cono

Reúnanse en equipos y resuelvan las siguientes actividades.

5. De acuerdo con la Figura 7, contesten las preguntas que se plantean.

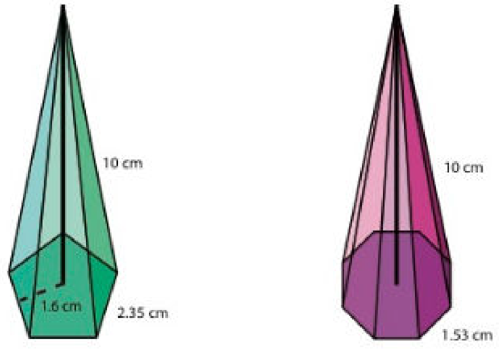


Figura 7

a) ¿Cuáles son las dimensiones de cada pirámide? ____________
b) ¿Cuál es el área de la base? ____________
c) ¿Cómo se modifica la base al aumentar el número de lados de la misma?
d) ¿Cuál es el volumen de las pirámides? ____________
e) ¿Qué relación existe entre el volumen de la pirámide pentagonal y el volumen de un prisma pentagonal con la misma base y la misma altura?
f) ¿Cuál pirámide tiene mayor volumen? ____________
g) Si comparan los volúmenes de la pirámide octagonal con una pirámide dodecagonal, ¿cuál tiene mayor volumen? Justifiquen su respuesta.

6. Consideren el cono de la Figura 8.

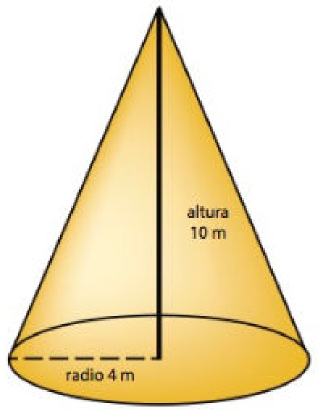


Figura 8

a) ¿Cuáles son las dimensiones del cono? ____________
b) ¿Cuál es el área de la base? ____________
c) ¿Cómo calcularían el volumen del cono?
d) ¿Cuál es el volumen del cono? ____________
e) Considerando las pirámides de la Figura 7 y el cono de la Figura 8, ¿cuál de estos tiene mayor volumen? ____________
f) Calculen el volumen de un cilindro con las mismas medidas de base y altura.
g) ¿Qué relación existe entre el volumen de un cilindro y el volumen de un cono cuando los valores de la altura y la base son los mismos en ambos?

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y comenten los procedimientos que los llevaron a cabo para resolver cada una de las situaciones anteriores, discutan la manera en que plantearon el volumen de las pirámides. Verifiquen, con ayuda de su profesor, que sean correctas. De manera grupal, analicen la similitud entre las fórmulas de las pirámides y la fórmula del cono; exprésenla algebraicamente. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Analicé el cálculo del volumen de varias pirámides de diferentes bases y su analogía con el cálculo del volumen del cono.		
Reflexioné acerca de la relación que existe entre el volumen del cono y el del cilindro cuando ambos tienen la misma altura y la misma base.		
Establecí una expresión algebraica para calcular el volumen de un cono.		

AUTOEVALUACIÓN

Vitaminas

Analiza la siguiente situación.

1. Compara las siguientes figuras y analiza lo que se te pregunta.
   - **a)** ¿Cuáles son las dimensiones del cono?
   - **b)** ¿Cuál es el área de la base?
   - **c)** ¿Cuál es el volumen del cono?

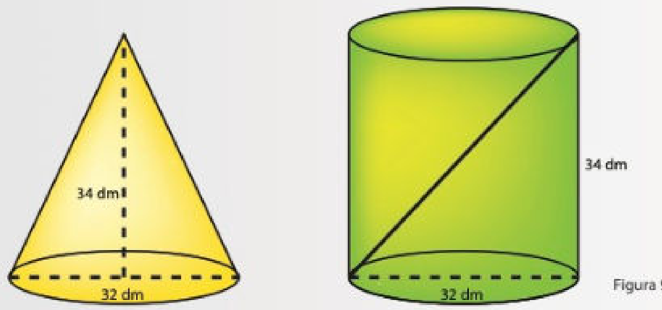


Figura 9

   - **d)** ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro?
   - **e)** ¿Cuál es el volumen del cilindro?
   - **f)** ¿Qué relación existe entre el volumen del cilindro y el volumen del cono cuando la altura y la base son las mismas en ambos?

Compara tus respuestas con el resto del grupo, discutan los procedimientos que emplearon para resolver y con ayuda de su profesor aclaren sus dudas.

Para concluir

Reúnete con un compañero para realizar las siguientes actividades.

1. En una nevería existen dos presentaciones para servir el helado, en cono o en vaso, ambas por el mismo precio, pero en ninguno de los casos el helado servido debe desbordar el recipiente.
   - **a)** Con estas condiciones, ¿qué presentación de helado les conviene más?
2. Analicen el cilindro y el cono de la Figura 10 e indiquen la altura a la que deben llenar los recipientes para que almacenen la mitad de su volumen.
   - **a)** Calculen el volumen del cono y el cilindro generado con las alturas que marcaron.
   - **b)** ¿Son, efectivamente, la mitad del volumen de los cuerpos originales? Argumenten su respuesta.
   - **c)** ¿Qué pueden concluir al respecto?

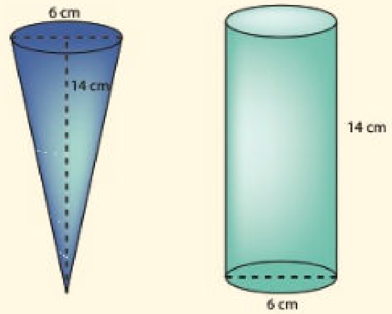


Figura 10

De manera grupal, comparen sus respuestas y reflexiones. En caso de dudas o dificultades soliciten el apoyo de su profesor.

RDT

Visita la página: http://www.hdt.gob.mx/new_media/secundaria_3/matematicas_b5/oda_5308_0/recurso/ (última consulta: 15 de noviembre 2013).
En ella encontrarás un recurso con el que podrás consolidar lo que aprendido referente al cálculo de volúmenes de cilindros, mediante un cuestionario interactivo, en caso de dudas consulta a tu profesor.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones acerca de la construcción de las fórmulas para calcular el volumen de conos y cilindros rectos, así como la relación que existe entre el volumen de un cilindro y un cono cuyos valores de radio y altura son iguales en ambos.

Lección 4 | Resolución de problemas de cilindros y conos

Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

Ventana

Reúnanse en parejas y estudien la siguiente situación.

1. En la Figura 1 se muestra la manga que el chef Omar utiliza para decorar sus pasteles con merengue.

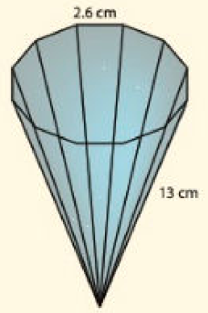


Figura 1

a) Si el merengue lo venden en presentaciones de un litro en botes con las medidas que se pueden ver en la Figura 2, estimen aproximadamente y sin hacer operaciones escritas, cuántas veces debe llenarse la manga para terminarse el contenido del bote.

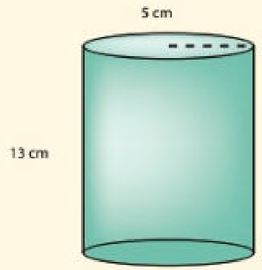


Figura 2

b) ¿Cuál es la capacidad real de estos botes para la presentación de un litro?

Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Analicen los procedimientos empleados para resolver las situaciones anteriores y si obtuvieron los mismos resultados. En caso de dudas o diferencias identifiquen el motivo y soliciten el apoyo de su profesor.

Conexiones

En segundo grado de secundaria estudiaste la construcción de fórmulas para el cálculo de volúmenes de pirámides y prismas rectos y analizaste la relación de variación entre diferentes medidas de prismas y pirámides. Para esta lección te será de utilidad retomar esos contenidos, así como los de la lección anterior acerca de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos.

Glosario

manga. En repostería, utensilio de tela, de forma cónica, provisto de un pico de metal u otro material duro, que se utiliza para decorar postres.

:: Manos a la obra

Reúnanse en parejas y desarrollen las siguientes actividades.

1. El chef Omar usa diferentes vasos y recipientes para medir las porciones que necesita al preparar un pastel. Dos de estos recipientes se muestran en la Figura 3.
   a) ¿Cuál es el volumen del primer vaso?
   b) Si el segundo recipiente tiene tres cuartas partes del volumen del primero, ¿cuál es la medida de su radio?
   c) Estimen, sin hacer operaciones escritas, cuál debería ser la altura del segundo recipiente si se conserva el mismo radio y se desea que tenga el mismo volumen que el primero.
   d) Si ahora se desea conservar la altura, estimen cuál debería ser la medida del radio para que tenga la mitad del volumen del primer recipiente.

Figura 3

2. Para una receta el chef necesita tres tazas de jugo de naranja. Si una taza equivale a 250 ml, ¿hasta qué altura debe llenar el molde de la Figura 4, si no desea usar un vaso medidor?

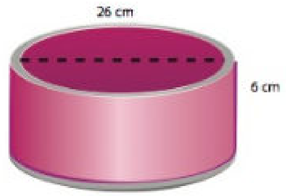


Figura 4

   a) Si el resto de los ingredientes de la mezcla tienen un volumen de 2 000 cm^3, ¿el molde que está usando es suficiente para contenerlos? Expliquen.

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Argumenten la forma en que resolvieron cada una de las situaciones. En caso de dudas o dificultades acudan a su profesor.

Analiza y resuelve la siguiente situación.

3. Un nuevo juego de recipientes para especias salió a la venta esta semana y el chef Omar está interesado en comprarlos. Los tamaños de los recipientes son como los que aparecen en la Figura 5. Ayuda al chef a calcular la capacidad de cada uno de los recipientes.

Figura 5

a) ¿Cómo es el radio de los recipientes? ____________

b) ¿Cuál es el volumen de cada uno de los recipientes? ____________

c) Completa la Tabla 1 con los datos que se solicitan.

Tabla 1

Altura del recipiente					
Volumen del recipiente					

d) ¿Cómo varía el volumen del cilindro cuando la altura cambia y el radio se mantiene constante? ____________

e) Con la información de la Tabla 1 realiza la gráfica de la relación entre el volumen respecto al incremento de la altura. Asigna los nombres a los ejes.

f) ¿Qué tipo de gráfica resulta?, ¿por qué?

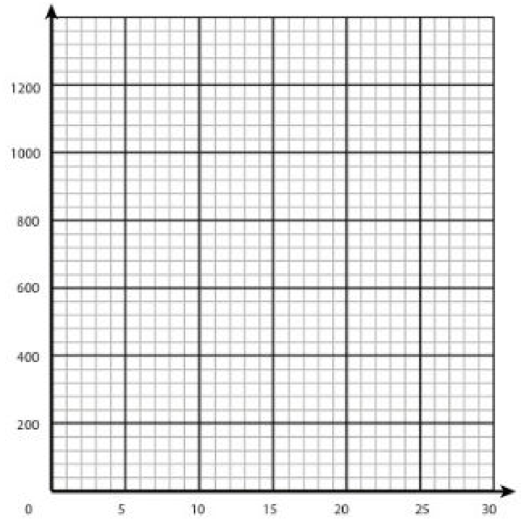


Figura 6

Compara tus resultados con los de otros compañeros y comenten los procedimientos que llevaron a cabo para resolver cada una de las situaciones anteriores. Verifiquen, con ayuda de su profesor, que sean correctas. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

En tu biblioteca

Calcula el volumen de diferentes recipientes de acuerdo con su forma, en el apartado ¿Cuánta agua le cabe a tu tinaco? en la página 44 del libro de José Antonio de la Peña, *Geometría y el mundo*, México, SEP/Editorial Santillana (2002).

Reúnanse en equipos y desarrollen las siguientes actividades.

4. Una marca de helados acaba de sacar al mercado una congelada que se distribuye en envases con forma de cono como los que se muestran en la Figura 7.

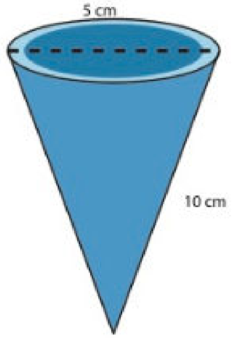


Figura 7

a) ¿Cuáles son las dimensiones del envase? ____________

b) ¿Cuál es el volumen de la congelada? ____________

5. El líquido para las congeladas se deposita en tres contenedores como los de la Figura 8.

Figura 8

a) ¿Cuál es el volumen de los contenedores? ____________

b) Estimen, sin hacer operaciones escritas, cuántos envases se pueden llenar con este volumen. ____________

c) ¿Cuánto líquido sobra en los contenedores? ____________

d) Para seguir innovando en el mercado, la misma empresa ha decidido hacer un nuevo envase en forma de cilindro, pero con el mismo radio y altura que en el empaque de cono.
   - ¿Cuál será el volumen de este nuevo envase?
   - ¿Qué relación existe entre el volumen del nuevo envase y el de la presentación anterior?
   - ¿Cómo debe ser el costo de la nueva congelada, con respecto a la anterior, para conservar el mismo nivel de ganancias?

Glosario

confite. Dulce de forma esférica hecho de azúcar u otro ingrediente.

RDT

Visita la página: http://www.hdt.gob.mx/new_media/secundaria_3/matematicas_b5/oda_5302_0/recurso/ (última consulta: 15 de noviembre 2013).
En ella encontrarás un recurso donde podrás complementar lo aprendido en esta lección mediante un cuestionario interactivo, trabaja el recurso en equipo y compartan con el resto de la clase las conclusiones. En caso de dudas consulta a tu profesor

6. En la fábrica de helados, el depósito de confites tiene la forma que se observa en la Figura 9. Si se sabe que el nivel de los confites, medido desde la punta es 60 cm, ¿a qué porcentaje se encuentra de su capacidad?

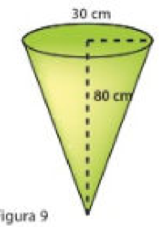


Figura 9

7. Consideren los conos de la Figura 10, cuya medida del radio es la misma para todos (3 cm).
   a) Completa la Tabla 2 con el volumen para cada cono al variar la altura.

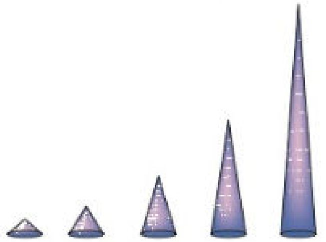


Figura 10

Altura (cm)	2	4	8	16	32
Volumen (cm³)					

Tabla 2

   b) ¿Cómo varían la altura y el volumen del cono cuando el radio permanece constante?
   c) Construyan, en el plano de la Figura 6, la gráfica de los datos de la Tabla 2.
   d) ¿Cómo son las dos gráficas?
   e) ¿Qué pueden concluir? Expliquen su respuesta.

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y comenten los procedimientos que llevaron a cabo para resolver cada una de las situaciones anteriores. Analicen la relación que existe entre el volumen del cono y el volumen del cilindro al variar la altura y mantener el radio constante. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

AUTOEVALUACIÓN

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Identifiqué los elementos que definen un cono y calculé sus medidas.		
Calculé correctamente volúmenes de conos y cilindros o de otras variables que aparecen en sus fórmulas.		
Analicé el cambio del volumen del cono y el cilindro al variar su altura y mantener el mismo radio.		

Vitaminas

Lee las siguiente situación y analiza cómo resolverla.

1. Dado un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 52 cm y uno de sus catetos mide 20 cm, al hacer girar este triángulo sobre el cateto de valor 20 cm, se genera un cono.
   a) ¿Cuáles son las dimensiones del cono?
   b) ¿Cuál es el volumen del cono?
   c) A partir de las dimensiones del cono construye un cilindro, ¿cuál es el volumen del cilindro?
   d) Si hicieras girar el triángulo sobre el otro cateto, ¿cuáles serían las dimensiones de este nuevo cono?
   e) Calcula su volumen y analiza cómo es en relación con el volumen del primer cono.

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y escribe tus conclusiones en el cuaderno.

Para concluir

En parejas, realicen la siguiente actividad.

1. De acuerdo con la información de la Figura 11, contesten las siguientes preguntas.
   a) ¿Cómo calcularían el volumen de la parte sombreada?
   b) ¿Cuál es ese volumen?

Compartan sus respuestas con otros equipos y analicen los procedimientos que cada uno siguió para resolver la actividad. Si tienen dudas o diferencias acudan a su profesor para solucionarlas.

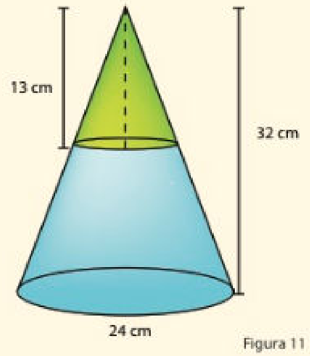


Figura 11

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre el uso de las fórmulas para calcular el volumen de conos y cilindros rectos, así como la relación que existe entre el volumen de un cilindro y un cono cuando varía su altura y el radio permanece constante.

Lección 5 | Análisis de situaciones con variación lineal o cuadrática

Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Ventana

Reúnanse en parejas y analicen las siguientes situaciones.

1. Una casa automotriz ha presentado el próximo lanzamiento de su nuevo auto. Al nuevo automóvil se le han realizado pruebas de velocidad para conocer lostiempos de reacción. En las dos primeras filas de la Tabla 1 se registraron los tiempos y las distancias recorridas por el automóvil.

t (s)	1	2	3	4	5
d (m)	13.88	27.76	41.64	55.52	69.4
velocidad (m/s)					

Tabla 1

Conexiones
En segundo y tercer grado has estudiado relaciones lineales y cuadráticas, respectivamente; analizaste sus representaciones algebraicas, tabulares, la lectura y construcción de sus gráficas, entre otros aspectos, y las empleaste en la solución de diferentes situaciones. Retomar estos conocimientos te será de utilidad en el desarrollo de la presente lección.

a) ¿Qué operaciones harían a la magnitud de la velocidad para obtener la correspondiente distancia recorrida?
b) ¿Qué expresión algebraica permite relacionar la distancia con el tiempo?
c) ¿Qué tipo de expresión es?
d) Si la velocidad de un cuerpo se determina por la distancia recorrida en cierto tiempo, completen, en la tercera fila de la Tabla 1, la velocidad correspondiente a cada segundo.
e) De acuerdo con la información, ¿cómo es la velocidad?
f) En su cuaderno tracen la gráfica que relaciona la distancia con el tiempo.

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y comenten los procedimientos que llevaron a cabo para completar la tabla anterior. Discutan la manera en que se plantean las relaciones entre los conjuntos solicitados y cómo encontraron las representaciones algebraicas. Verifiquen, con ayuda de su profesor, que sean correctas.

:: Manos a la obra

Reúnanse en parejas y analicen las siguientes situaciones.

1. De acuerdo con la segunda prueba que se le realizó al automóvil, se obtuvo la información de la Tabla 2.

t (s)	1	2	3	4	5
d (m)	4.9	19.6	44.1	78.4	122.5

Tabla 2

a) ¿Cuál es la constante que relaciona estos datos?
b) ¿Cómo será su gráfica?
c) ¿Qué valor tendrá en el origen?
d) Construyan la gráfica correspondiente en el plano de la Figura 1.

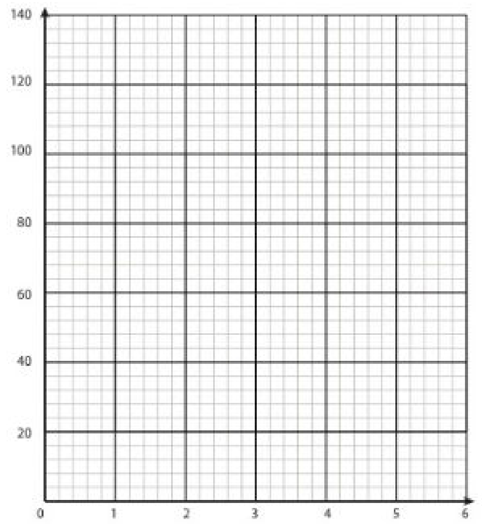


Figura 1

En tu biblioteca
Consulta el libro de Anna Cerasoli, *La sorpresa de los números: un viaje al fascinante universo de las matemáticas*. México: SEP/Ediciones Maeva (2007).
En este libro encontrarás diferentes aplicaciones de la matemáticas en la vida diaria, cómo por ejemplo: En qué medida aumentan las bacterias en tu cuerpo cuando no te bañas.

e) De acuerdo con esta gráfica, ¿a qué distancia se encontraba el automóvil a los 2.5 s?

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y comenten los procedimientos que llevaron a cabo para resolver cada una de las situaciones anteriores, expliquen qué métodos les parecieron más efectivos. En caso de dudas consulten a su profesor.

Analiza la siguiente situación.

2. Los empleados de la casa automotriz se dividen en trabajadores administrativos y trabajadores de planta. El número de trabajadores de planta es el doble que en el área administrativa.
a) ¿Cómo se representa la relación entre el número de empleados?
b) ¿Qué tipo de ecuación es la que modela esta situación?
c) Los empleados de planta se dividen en dos turnos, el primero tiene 60% de los empleados y el otro turno tiene al restante. ¿Cómo modelarías esta relación?
d) ¿Cómo será la gráfica que represente esta relación?
e) ¿Pasará por el origen? Argumenta tu respuesta.
f) Construye la gráfica en tu cuaderno y compárala con lo que anticipaste de ella.

Compara tus respuestas y la gráfica que construiste con las de tus compañeros. En caso de dudas, soliciten el apoyo de su profesor.

Reúnanse en parejas y analicen las siguientes situaciones.

3. La misma cadena automotriz trabaja con camiones de pasajeros en la central de autobuses de la ciudad. Dicha central tiene dos recorridos muy solicitados.
El primer recorrido, con seis escalas, registra los datos de la Tabla 3; mientras que el segundo, registra los datos de la Tabla 4.
   a) Completen los datos correspondientes de la Tabla 3.

t (h)	0.8		4.5	5.3	6	
d (km)		180		424		600

Tabla 3

   b) ¿Cuál es la velocidad a la que viaja el camión durante el primer recorrido?
   c) En su cuaderno construyan la gráfica que representa la relación entre el tiempo y la distancia del primer recorrido.
   d) Completen la información de la Tabla 4.

t (h)	0.2		2.1	3	3.5	4.1	
d (km)		38.5		165		225.5	275

Tabla 4

   e) ¿Cuál es la velocidad a la que viaja el camión durante el segundo recorrido?
   f) En su cuaderno tracen la gráfica que representa la relación entre el tiempo y la distancia del segundo recorrido.
   g) Si el recorrido fuese de 900 km, ¿cuál de los dos autobuses llegaría primero?
   h) ¿En qué tiempo se realizaría el recorrido de los 900 km?

Comparen sus resultados con los de otros compañeros, analicen los procedimientos que emplearon para resolver cada una de las situaciones anteriores, expliquen qué métodos les parecieron más efectivos y por qué. En caso de dudas o diferencias consulten a su profesor.

Organizados en equipos, analicen la siguiente situación.

4. Para conocer el número de ventas de un automóvil, los trabajadores del área administrativa presentan un análisis gráfico a los gerentes de la casa automotriz. Durante el último bimestre se mostró la gráfica de la Figura 2.
   a) ¿Cuántos cambios presenta la gráfica?
   b) Indiquen los intervalos de cada uno de estos cambios.
   c) Completen la información de la Tabla 5.

Semana	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8
Decenas de automóviles vendidos								

Tabla 5

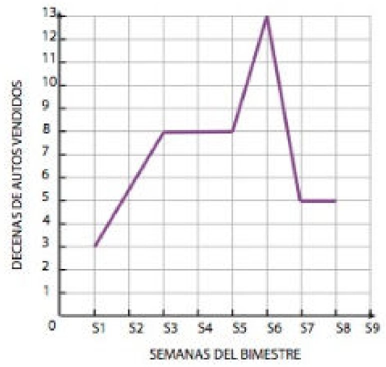


Figura 2

   d) ¿Para cuáles semanas las ventas se mantienen constantes?
   e) ¿En qué semanas las ventas de los autos son crecientes?
   f) ¿Para qué semanas las ventas decrecen?
   g) ¿Cómo podrían modelar algebraicamente esta gráfica? Separen la gráfica por semanas.

Comparen sus resultados con los de otros compañeros y comenten los procedimientos que llevaron a cabo para resolver cada una de las situaciones anteriores, discutan la manera en que se plantean las relaciones entre los conjuntos solicitados y cómo encontraron las representaciones algebraicas. Verifiquen, con ayuda de su profesor, que sean correctas.

Trabajen con sus mismos equipos la siguiente actividad.

5. Analicen las gráficas de la Figura 3.

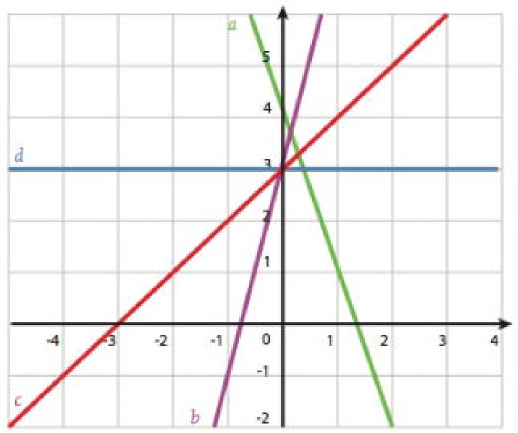


Figura 3

   a) ¿Cuál es la ordenada al origen de cada una de las gráficas?
   b) Relacionen, en la Tabla 6, las gráficas de la Figura 3 con su respectiva representación algebraica.

Gráfica			
Ecuación	$y = -3x + 4$	$y = 3$	$y = 4x + 3$

Tabla 6

6. Analicen las gráficas de la Figura 4 e identifiquen a qué tipo de relación corresponden.
   a) ¿Qué tipo de relación representan las gráficas de la Figura 4?
   b) ¿Cuántas veces intersecan al eje de las abscisas?
   c) Relacionen las gráficas de la Figura 4 con su respectiva representación algebraica.

Gráfica			
Ecuación	$x^2 - 1$	$2x^2 - 3$	x^2

Tabla 7

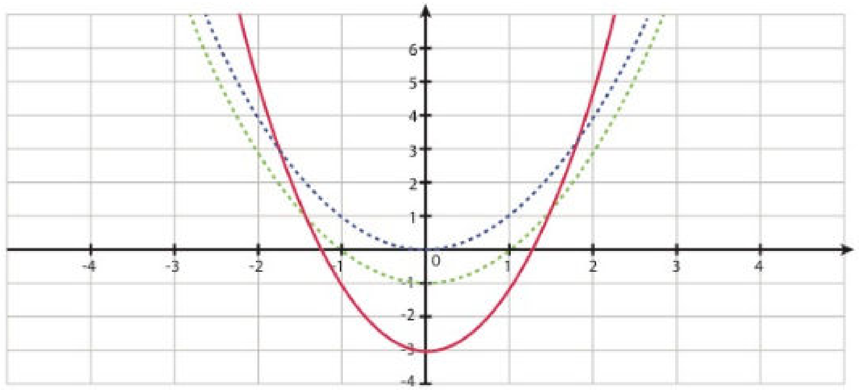


Figura 4

Comparen sus respuestas con las de los demás equipos y analicen los procedimientos que siguieron. En caso de dudas o desacuerdos acudan a su profesor para resolverlas. De manera grupal, escriban las conclusiones en su cuaderno.

Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
AUTOEVALUACIÓN — Relacioné conjuntos de datos que guardaban algún tipo de relación por medio de una expresión algebraica.		
Expresé por medio de gráficas o tablas las expresiones que modelaban a las situaciones.		
Relacioné las gráficas de variaciones cuadráticas o lineales con sus respectivas expresiones algebraicas.		

Vitaminas

De forma individual, resuelve el siguiente problema.

1. Durante la última prueba de velocidad que se le realizó al automóvil, se obtuvieron los siguientes datos. En el primer segundo se obtuvo una lectura de 17 m/s; a los dos segundos la lectura fue 34 m/s; en el tercer segundo, 51 m/s. A partir del cuarto segundo y hasta el décimo quinto la velocidad del automóvil se mantuvo en 68 m/s. En el décimo sexto segundo la velocidad comenzó a descender y la lectura fue de 50 m/s. Por cinco segundos más se mantuvo en esa lectura y en el segundo vigésimo la lectura fue de 40 m/s. En el vigésimo tercer segundo la velocidad fue de 30 m/s, en el vigésimo cuarto segundo fue de 20 m/s, en el vigésimo quinto fue de 10 m/s y para el vigésimo sexto segundo se detuvo por completo.
   a) ¿Cómo modelarías cada uno de los cambios de esta situación?
   b) Realiza una tabla con la información descrita.
   c) Elabora la gráfica de esta prueba en tu cuaderno.
   d) Señala qué representa cada cambio en la gráfica.

Compara tus respuestas y tu gráfica con las de otros compañeros. Cada uno explique cómo construyó su gráfica. Solicita el apoyo de tu profesor para resolver tus dudas.

Para concluir

Reúnanse en parejas y comenten la siguiente situación.

1. Analicen las gráficas de la Figura 5 y contesten las siguientes preguntas.
   a) ¿Qué tipo de funciones representan las gráficas de la Figura 5?
   b) Para el caso de la relación lineal, ¿qué razón de cambio existe entre las variables?
   c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa a la función lineal?
   d) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa a la función cuadrática?

De manera grupal, con el apoyo de su profesor, comparen sus respuestas. Argumenten la manera en que identificaron las gráficas con sus expresiones algebraicas y si es posible, a partir de la gráfica deducir otras características de las situaciones que representan. Escriban las conclusiones en el cuaderno.

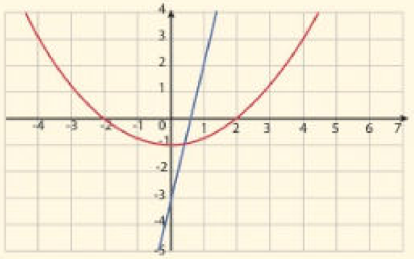


Figura 5

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre los procedimientos y herramientas empleadas para analizar la relación entre dos conjuntos de cantidades asociadas a diversas situaciones.

Lección 6 | Análisis de resultados de un juego justo

Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Ventana

Reúnanse en parejas y estudien las siguientes situaciones.

1. Durante la fiesta de fin de cursos se organizaron diferentes juegos en los que el ganador obtenía un premio. Uno de los juegos consistía en lanzar un par de dados y obtener dos caras iguales en una sola oportunidad, para ganar un reloj.
   a) Parte del espacio muestral está representado gráficamente en la Figura 1. Complétenlo.
   b) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

Conexiones

En el primer y segundo grado de secundaria iniciaste el estudio de la probabilidad de eventos y su cálculo. En los bloques anteriores analizaste las características de varios tipos de eventos. Estos contenidos te serán de utilidad en el desarrollo de la presente lección.

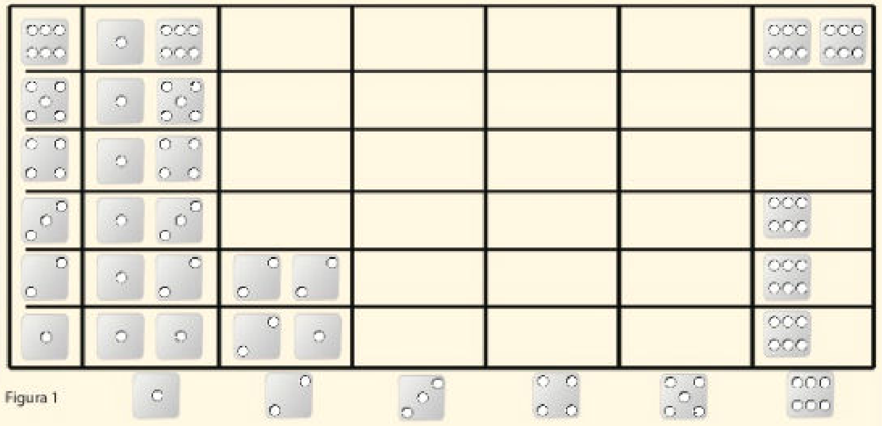


Figura 1

   c) ¿Cuántas maneras existen para obtener un par de caras iguales? Márquenlas en la Figura 1.
   d) ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio? ______
   e) ¿Cuántos tiros no ganadores hay? ______
   f) ¿Cuál es la probabilidad de perder? ______

Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Analicen los procedimientos empleados para resolver las situaciones anteriores, en caso de dudas o diferencias soliciten el apoyo de su profesor.

:: | Manos a la obra

Reúnanse en parejas y desarrollen las siguientes actividades.

1. Otro de los juegos que se realizó durante la fiesta de final de cursos es una competencia sobre una pista.

Para este juego se necesita de cuatro participantes, uno por cada carril.
Dentro de una urna oscura se colocan cuatro esferas pintadas con los colores de los carriles (naranja, verde, azul y amarillo); se extrae una esfera, se observa el color de la misma y se regresa a la urna. El concursante cuyo carril sea del color de la esfera que se saque avanzará una casilla. Gana el primero que llegue a la meta.

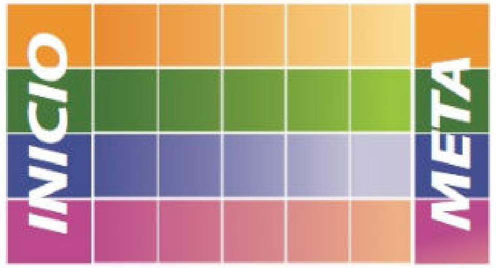


Figura 2

Con base en las características de la competencia, contesten:
   a) ¿Qué carril escogerían si quisieran llegar primero a la meta? Expliquen la razón.
   b) ¿En algún carril se está en desventaja con respecto a los demás? Justifiquen su respuesta. ______
   c) ¿Puede haber más de un ganador? ¿Por qué? ______
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que gane el carril naranja? ______
   e) ¿Cuál es la probabilidad de que gane el carril azul? ______
   f) ¿Consideran que cualquier carril tiene la misma probabilidad de ganar? ______ Argumenten su respuesta. ______

2. Otro de los juegos que se presentaron en la feria consistía simplemente en ganarle un volado al anfitrión del juego. Si se gana el volado se escoge un premio; si se pierde el volado se le da un castigo.
   a) ¿Cuál es el espacio muestral de este juego? ______
   b) ¿Alguno de los participantes tiene alguna ventaja con respecto al otro? ______
   c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un castigo? ______
   d) ¿Y la probabilidad de ganarle al anfitrión? ______
   e) Si en lugar de un volado fueran tres, es decir, si se le tienen que ganar tres volados al anfitrión, ¿cuál es al probabilidad de ganar un premio?
   f) ¿Consideran que el juego es justo? Justifiquen su respuesta.

Comparen sus predicciones con las del resto del grupo y revisen si fueron correctas. En caso de errores o dudas acudan a su profesor para resolverlas. En su cuaderno, escriban las conclusiones que generaron a partir de estas situaciones y si consideran que en los juegos anteriores todos tienen las mismas oportunidades. Compartan con el resto de la clase estas conclusiones.

Herramientas

Se dice que dos eventos son **equiprobables** cuando la probabilidad de ocurrencia de ambos sucesos es la misma. Si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos, serán equiprobables si todos son igualmente probables. Mientras que si no todos los eventos tienen la misma probabilidad, entonces se dice que el experimento es **no equiprobable**.

Analiza la siguiente situación.

3. Considera el experimento de lanzar un dado y que la cara superior muestre 1, 2, 3, 4, 5 o 6.
   a) ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento? Escríbanlo en su cuaderno.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la cara superior muestre 1, 2, 3, 4, 5 o 6?
   c) ¿Qué probabilidad se tiene de obtener 3? ____________________
   d) ¿Qué probabilidad se tiene de obtener 5? ____________________
   e) ¿Qué probabilidad se tiene de obtener un número par? Justifica tu respuesta.
   f) ¿Qué probabilidad se tiene de obtener un número múltiplo de 3? Justifica tu respuesta.
   g) Si te ofrecieran participar en un concurso donde para ganar te pidieran lanzar el dado y obtener un número primo, ¿qué probabilidad tendrías de ganar?
   h) Si para ganar te pidieran obtener un número impar, ¿qué probabilidad tendrías de ganar?
   i) ¿Cuál de los dos casos anteriores te parece más justo?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros, explica cuáles son tus argumentos para decir que el juego es justo o no lo es.

Reúnanse en parejas y analicen la siguiente situación.

4. Como parte de las actividades finales de la feria, se vendieron ciento veinte boletos para la rifa de una pantalla de 70 pulgadas. Los padres de familia fueron quienes compraron estos boletos. Todos los papás tienen al menos un boleto.
   La información exacta sobre la cantidad de boletos que los papás adquirieron se encuentra en la Tabla 1.

Tabla 1

Número de boletos	1 boleto	2 boletos	3 boletos	4 boletos	5 boletos	6 boletos
Número de personas con dicha cantidad de boletos	10	9	11	4	5	3

   a) ¿Cuántos padres de familia, en total, participan en la rifa?
   b) ¿Alguno de los participantes tiene ventaja sobre los otros? Justifiquen su respuesta.
   c) ¿Qué probabilidad existe de que el ganador de la televisión sea uno de los padres que compró sólo un boleto?
   d) ¿Qué probabilidad existe de que el ganador de la televisión sea uno de los padres que compró cuatro boletos?

   e) Completen la Tabla 2 con las probabilidades de que sea ganadora una persona que posee el número de boletos que se indica.
   f) ¿Todos tienen la misma probabilidad? Expliquen su respuesta.
   g) ¿Qué podrían hacer para que el juego sea justo?

Número de boletos	1 boleto	2 boletos	3 boletos	4 boletos	5 boletos	6 boletos
Probabilidad						

Tabla 2

De manera grupal comparen sus respuestas. Compartan su análisis de la situación y participen en la discusión de cómo hacer el juego justo.

Organizados en equipos, realicen la siguiente actividad.

5. El último juego que se colocó en la feria consistía en avanzar a lo largo de la pista de la Figura 3. Para avanzar es necesario que al lanzar dos dados la diferencia entre los números de sus caras sea 0, 1 o 2. De acuerdo con el resultado, el competidor que se encuentre sobre el carril con el número obtenido avanzará una casilla.

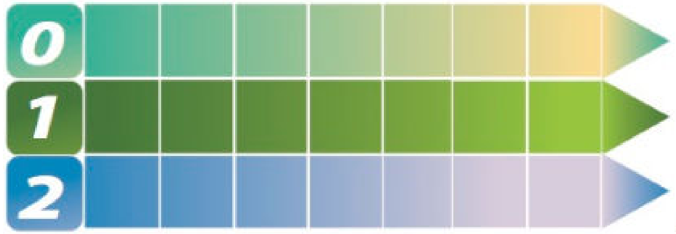


Figura 3

Completen la Tabla 3 con los posibles resultados de lanzar los dados y la diferencia entre sus caras.

Tabla 3

	1	Diferencia	2	Diferencia	3	Diferencia	4	Diferencia	5	Diferencia	6	Diferencia
1	(1,1)	0	(1,2)				(1,4)		(1,5)			
2	(2,1)	1			(2,3)		(2,4)					
3	(3,1)	2	(3,2)								(3,6)	
4	(4,1)	3										
5												
6												

a) ¿Cuántos de los resultados posibles tienen por diferencia 3, 4 o 5?
b) ¿Cuántos de los posibles resultados tienen por diferencia 0, 1 o 2?
c) ¿Cuál es la probabilidad que tiene cada jugador de ganar?
d) ¿Consideran que este juego es justo? Argumenten su respuesta.
e) Si se cambian las condiciones del juego, y en lugar de restar las caras se multiplican, ¿existiría, ahora, una ventaja para algún participante? Justifiquen su respuesta.
f) ¿Cuál sería la probabilidad de ganar de cada jugador en este caso?
g) Si los números de las caras se sumaran, ¿algún participante estaría en desventaja con los demás? Justifiquen su respuesta.
h) ¿Qué condiciones pueden proponer para que el juego sea un juego justo?

Compartan sus respuestas con los demás equipos y comenten a qué conclusiones llegaron; analicen si es que todos llegaron a la misma conclusión sobre los jugadores y en caso de diferencias consulten a su profesor. Con ayuda de su profesor, lleven a cabo el juego y analicen cómo son entre sí los resultados con sus observaciones. Escriban en su cuaderno las conclusiones.

AUTOEVALUACIÓN: Toma un momento para hacer una autoevaluación acerca de los procedimientos y las reflexiones que llevaste a cabo en esta actividad en equipo.	Sí	No
Calculé correctamente las probabilidades de los posibles resultados.		
Analicé las condiciones de los eventos equiprobables y no equiprobables.		
Identifiqué cuál de los juegos es más justo, a partir de la naturaleza de los mismos.		
Participé en la propuesta para cambiar las condiciones de los experimentos no equiprobables para volverlos más justos.		

Vitaminas

Lee las siguiente situación y analiza cómo resolverla.

1. Al final de la feria en el juego de la actividad 5 quedaron sólo dos participantes que querían jugar. El anfitrión del juego decidió que las reglas debían modificarse para que pudieran jugar los dos competidores. Después de un rato propuso las nuevas reglas de la siguiente forma: "Si al lanzar los dados, la diferencia entre los puntos de ambas caras es 1, 2 o 3 avanza el primer jugador; si la diferencia es 4, 5 o 0 avanza el segundo jugador.
   a) ¿Cuál de los dos jugadores preferirías ser?, ¿por qué?
   b) ¿Consideran que las nuevas reglas hacen el juego justo?
   c) Si en lugar de considerar la diferencia consideraran sumar las caras, ¿alguno de los participantes tendría ventaja sobre el otro?
   d) Si la regla fuera multiplicar las caras, ¿qué jugador preferirías ser?
   e) ¿Qué reglas propondrías para que el juego fuera justo?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros. En caso de dudas, soliciten el apoyo de su profesor.

Para concluir

Reúnanse en parejas y analicen las siguientes situaciones.

1. En un juego hay un total de 100 esferas enumeradas del 1 al 100 dentro de una urna y 100 tarjetas, cada una con un número del 1 al 100. El participante escoge una tarjeta y el anfitrión saca una esfera, si los números coinciden, el participante gana.
   a) Si el participante escoge la tarjeta con el número 50, ¿qué probabilidad tiene de ganar?
   b) ¿Existe alguna tarjeta con la que sea más probable ganar? Justifiquen.

Otra versión de este juego es para cuatro personas, quienes deben escoger una de las cuatro tarjetas participantes. Las tarjetas tienen las siguientes condiciones:

Número par	Número impar
Número primo	Múltiplo de 5

Una vez escogida la tarjeta se extrae una de las esferas, si el número de la esfera coincide con la condición que el participante eligió, entonces gana.
   c) ¿Consideran que este juego es justo?
   d) ¿Todos los participantes tienen la misma probabilidad de ganar?
   e) ¿Qué cambios en la dinámica pueden proponer para que el juego sea justo?

De forma grupal, con el apoyo de su profesor, analicen sus reflexiones sobre las características de los juegos y participen en la propuesta de otras condiciones para que sea un juego justo.

Reflexiona

Escribe de manera formal tus conclusiones y reflexiones sobre los experimentos con resultados equiprobables y los no equiprobables y sobre cómo influyen para que un juego sea considerado justo.

____

____

RDT

Visita la página electrónica http://www.cete-sonora.gob.mx/recursos/isos/rec_mult_edu_sec1er_grado/matematicas/bloque_5/eventos_equiprobables_o_no_equipoprobables_MA1_B5_5.4.2/ODA_MA1_B5_5.4.2.html (última consulta: 11 de junio 2013). En ella encontrarás un programa interactivo que te permitirá consolidar lo aprendido en esta lección. Comparte tus experiencias con las de tus compañeros y con el apoyo de tu profesor resuelvan sus dudas.

Primera parte

Responde las preguntas y describe las operaciones necesarias para resolver los siguientes problemas:

El papiro de Ahmes

1. El papiro de Ahmes, es un documento egipcio que data del siglo XVI a.n.e. y contiene 87 problemas matemáticos de diferentes áreas; uno de los problemas más famosos es el problema 79, que dice lo siguiente:

> *Camino a St. Ives encontré a un hombre con siete esposas, cada esposa tiene siete sacos, cada saco tiene siete gatos y cada gato tiene siete gatitos.*

Figura 1

a) ¿Cuántos gatos y gatitos hay?
b) ¿Cuántos sacos hay?
c) ¿Cuántos iban a St. Ives?

Otro de los problemas más conocidos del Papiro de Ahmes es el problema 31:

> *Una cantidad, junto con sus dos terceras partes, su medio y su séptimo asciende a 33.*

Figura 2

d) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones modela esta situación?

I. $x + (2)(3)x + 2x + 7x = 33$ II. $x + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} = 33$

III. $x + \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{7}x = 33$ IV. $x = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{7}x + 33$

Volados

2. En la Figura 3 se muestra el espacio muestral que se obtiene al lanzar dos monedas.

Figura 3

a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?
b) ¿Cuál de los siguientes eventos es más probable?
I. Obtener dos caras iguales. II. Obtener dos caras diferentes.
c) Si el ganador es el jugador que obtenga dos caras con sol, ¿qué tan probable sería ganar?

Segunda parte

De las respuestas que se proponen, escoge la opción correcta y márcala con una ✓:

1. Una pipa de agua como la que se muestra en la Figura 4, ha repartido el 45% de su volumen total. ¿Qué volumen, en litros, le resta por repartir?

Figura 4

a) 31 102 litros b) 31 120 litros c) 32 102 litros d) 31 012 litros

2. Con un triángulo, como el de la Figura 5, se genera un cono. Si la altura del cono es el cateto faltante, ¿cuál es el volumen del cono?
a) 3 217 m^3 b) 3 271 m^3
c) 2 317 m^3 d) 2 137 m^3

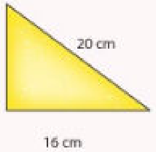


Figura 5

3. La ecuación de la gráfica que se muestra en la Figura 6 es:

a) $x^2 + 1$
b) $(x + 1)^2$
c) $(x - 1)^2$
d) $x^2 - 2$

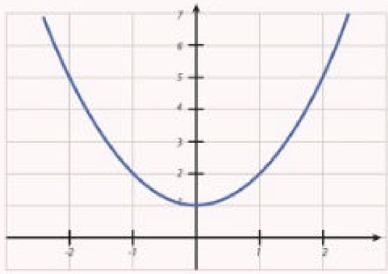


Figura 6

4. Se lanza un dado y una moneda al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que en el dado se obtenga un 4 y en la moneda un águila ?
a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{2}{8}$ d) $\frac{2}{8}$

EVALUACIÓN

Solicita a tu profesor que evalúe tus aprendizajes esperados, proporcionándote indicaciones y sugerencias para mejorar.	Incipiente	En desarrollo	Logrado
Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.			
Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.			
Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.			
Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.			
Sugerencias:			

Glosario general

cilindro. Cuerpo geométrico delimitado por una cara curva y dos caras planas de forma circular. Se genera por un rectángulo que gira sobre uno de sus lados.
círculo. Superficie delimitada por una circunferencia.
circunferencia. Conjunto de todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de otro llamado centro de la circunferencia.
congruencia. En geometría, se dice que dos figuras son congruentes si son idénticas en tamaño y forma.
cono. Cuerpo geométrico delimitado por una cara curva y una cara plana circular. Se genera por el giro de un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos.
coseno. Razón trigonométrica que representa el cociente de las longitudes del cateto adyacente y la hipotenusa.
dispersión. Diferencia entre la media o promedio y los elementos del conjunto de datos correspondiente.
ecuación. Igualdad entre dos expresiones algebraicas que se cumple para un valor o valores específicos.
equiprobable. Se dice de un evento aleatorio que tiene la misma probabilidad de ocurrencia que otro.
esfera. Cuerpo geométrico que cumple que todos los puntos de la superficie están a la misma distancia de su centro. Es generado por un semicírculo que gira sobre su diámetro.
factorizar. Expresar un número o polinomio como el producto de dos o más factores.
homotecia. Es una transformación de una figura tomando como referencia un punto O llamado centro de homotecia y un número r conocido como razón de homotecia.
pendiente. En geometría se refiere a la medida de inclinación de una recta.
pirámide. Cuerpo geométrico delimitado por una base poligonal y caras triangulares cuyo número depende del número de lados del polígono base.
polígono. Figura plana delimitada por un número de segmentos todos consecutivos conocidos como lados del polígono.
probabilidad. Razón entre el número de casos favorables y el total de casos posibles de un experimento aleatorio.
razón de cambio. Cociente que se obtiene de dividir el incremento o cambio de una cantidad entre el correspondiente incremento de otra con la que está relacionada.
rotación. Es el movimiento de giro alrededor de un punto fijo, el cual es llamado centro de rotación. Este movimiento no altera el tamaño de la figura.
semejanza. Dos polígonos son semejantes si tienen ángulos correspondientes iguales y los lados correspondientes son proporcionales.
seno. Razón trigonométrica que representa el cociente de las longitudes del cateto opuesto y la hipotenusa.
simetría. Transformación de una figura con respecto a un centro (simetría central) o a un eje (simetría axial).
sucesión. Conjunto ordenado de términos (números o figuras) generado por un patrón o regla.
tangente. Razón trigonométrica que representa el cociente de las longitudes del cateto opuesto y el cateto adyacente.
traslación. Es el movimiento de un objeto geométrico de manera que cada uno de sus puntos se mueve en la misma dirección, la misma distancia, sin alterarse su tamaño ni orientación.
trigonometría. Parte de las matemáticas que se encarga del estudio de las relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos.

Bibliografía consultada

Airasian, W. Peter, *La evaluación en el salón de clases*, México: SEP/McGraw-Hill, 2002 (Biblioteca para la Actualización del Maestro).

Alarcón, Jesús; et al, *Matemáticas Secundaria, Libro para el Maestro*, México: SEP, 2004.

Barriendos, Ana; Solares, Diana, *Matemáticas III. Telesecundaria. Libro para el maestro*, Vols. I-II, México: SEP, 2007.

Brousseau, Guy, *Educación Matemática*, Vol. XII, núm. 1, México: Grupo Editorial Iberoamérica, 2000.

Castro, Robinson; Castro, Rubby, *Didáctica de las Matemáticas, De preescolar a secundaria*, Colombia: ECOE, 2011.

Kasner, E.; Newman, J., *Matemáticas e imaginación*, México: Conaculta, 2007.

Perrenoud, Philippe, *Diez nuevas competencias para enseñar*, México: SEP/Graó, 2004 (Biblioteca para la Actualización del Maestro).

Bibliografía para el alumno

Castillo Macías, Durán; et al, *Matemáticas III. Telesecundaria. Libro para el alumno,* México: SEP, 2007.

Gardner, Martín, *Matemática para divertirse,* New York: Dover Publications Inc, 1986.

Langdon, Nigel; Snape, Charles, *El Fascinante mundo de las Matemáticas,* México: SEP, 1990 (Biblioteca Escolar).

Perelman, Yakov, *Matemáticas recreativas,* México: SEP/Martínez Roca, 2003 (Biblioteca de Aula).

Villagrá, Rosario; Villagrá Ana, *Atlas básico de matemáticas,* México: SEP/ Parramón Ediciones, 2003 (Biblioteca de Aula).

Bibliografía para el profesor

Alarcón Bortolussi, Jesús; et al, *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria,* México: SEP, 2000.

Bodrova, Elena; León, J. Deborah, *Herramientas de la mente,* México: SEP/ Pearson, 2004 (Biblioteca para la actualización del maestro).

Clapham, Christopher, *Diccionario de Matemáticas,* España: Oxford, 2004.

Espinosa Pérez, Hugo; et al, *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas Secundaria,* México: SEP, 2001.

Palmer, Bibb; et al, *Matemáticas prácticas,* España: Reverté, 2003.

Polya, Gorge, *Cómo plantear y resolver problemas,* México: Trillas, 2001.

Zubieta Badillo, Gonzalo; et al, *Geometría dinámica, Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT),* México: SEP, 2000 (Educación Secundaria).

Sitios de Internet para el alumno

http://www.hdt.gob.mx/hdt/
En esta página podrás realizar actividades interactivas llamadas ODAS sobre muchos temas que estudias en la secundaria. (última consulta: 21 de junio de 2013)

http://www.efit-emat.dgme.sep.gob.mx/
En esta página podrás realizar actividades interactivas sobre una gran variedad de temas que se analizan en secundaria. (última consulta: 21 de junio de 2013)

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/
En esta página podrás realizar actividades interactivas así como aplicaciones y prácticas de matemáticas. (última consulta: 21 de junio de 2013)

http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/
En esta página podrás buscar actividades interactivas para realizar, las cuales te serán de utilidad para consolidar tus conocimientos en temas de secundaria. (última consulta: 21 de junio de 2013)

http://es.thefreedictionary.com
En esta página es un diccionario virtual donde podrás consultar diferentes conceptos relaciones con las lecciones de este libro. (última consulta: 21 de junio de 2013)

http://sobreconceptos.com/category/matematica
En esta página hay un glosario de conceptos relacionados con el estudio de las Matemáticas. (última consulta: 21 de junio de 2013)

Sitios de Internet para el profesor

http://www.efit-emat.dgme.sep.gob.mx/
En esta página encontrará actividades interactivas sobre muchos temas que se tratan en secundaria. (última consulta: 21 de junio de 2013)

http://www.ite.educacion.es/
En esta página encontrará recursos didácticos virtuales que podrá vincular con las actividades y contenidos diversos del nivel secundaria. (última consulta: 21 de junio de 2013)

http://www.disfrutalasmatematicas.com/profesor-material.html
En este página podrá revisar diversos recursos didácticos relacionados con la enseñanza de las matemáticas del nivel secundaria. (última consulta: 21 de junio de 2013)

http://red.ilce.edu.mx
En esta página podrá encontrar, en la parte Docentes, cursos y diplomados en línea, para el desarrollo de competencias docentes en el uso de las TIC, mientras que el la parte Recursos Educativos, encontrará materiales relevantes sobre el estudio de las matemáticas a través de la secundaria. (última consulta: 21 de junio de 2013)

http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/
En esta página podrá buscar diversas actividades interactivas, referentes a temas de secundaria, que puede vincular con las actividades en el aula. (última consulta: 21 de junio de 2013)

http://www.ditutor.com/
Esta página cuenta con un glosario en donde podrá consultar términos matemáticos ligados al estudio de las Matemáticas en la secundaria. (última consulta: 21 de junio de 2013)

http://www.rpdp.net/mathdictionary/spanish/vmd/system/grd-k12-index.htm
En este sitio web se cuenta con un glosario donde es posible consultar conceptos matemáticos acompañados de apoyos visuales útiles para su mejor comprensión. (última consulta: 21 de junio de 2013)

http://schollaris.com.mx/99glosario.php
En esta página hay un glosario de términos matemáticos para su consulta sobre conceptos y temas vistos en secundaria. (última consulta: 21 de junio de 2013)